Pap Júlia

Integrality, complexity and colourings in polyhedral combinatorics

(Egészértékűség, bonyolultság és színezés a poliéderes kombinatorikában)

című doktori értekezésének tézisei

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Intézet

Doktori iskola: Matematika
Vezető: Laczkovich Miklós, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Doktori program: Alkalmazott Matematika
Vezető: Michaletzky György, a tudományok doktora

Témavezető: Frank András, a tudományok doktora
Konzulens: Király Tamás, PhD

Kutatóhely: ELTE Operációkutatási Tanszék, MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport, Budapest, Magyarország

2012

1.Hilbert-bázisok, TDL-ség és g-polimatroidok bonyolultsága

Az értekezés második fejezetében poliéderek, lineáris egyenlőtlenségrendszerek illetve vektorhalmazok néhány tulajdonságának bonyolultságát vizsgáljuk, és melléktermékként pár kapcsolódó eredményt is bizonyítunk.

1.1. A Hilbert-bázis tesztelés nehéz

Vektorok egy véges halmaza *Hilbert-bázis*, ha az általuk generált kúp minden egész eleme előáll nemnegatív egész együtthatós kombinációjukként is. 1990-ben Papadimitriou és Yannakakis [15] feltették a kérdést, hogy mi a bonyolultsága annak, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszer TDI-e, illetve ehhez kapcsolódóan annak, hogy egy vektorhalmaz Hilbert-bázis-e. Mindkettő sokáig nyitva maradt. Nemrég Ding, Feng és Zang [11] belátták, hogy annak eldöntése, hogy egy $Ax \geq 1,\ x \geq 0$ alakú rendszer TDI-e, co-NP-teljes, akkor is, ha A egy gráf incidenciamátrixa. Megválaszoljuk a másik kérdést, erősítve ezt az eredményt.

1.1. Tétel ([7])**.** *Annak eldöntése, hogy egész vektorok egy halmaza Hilbert-bázist alkot-e, co-NP-teljes, akkor is, ha a vektorok binárisak és legfeljebb három 1-est tartalmaznak.*

1.2. TDL-ség és g-polimatroidok

Egy $p : 2^{[n]} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ és egy $b : 2^{[n]} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ halmazfüggvényhez tekintsük a

$$Q(p,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : p(S) \leq x(S) \leq b(S)\ \forall S \subseteq [n]\} \tag{1}$$

poliédert. Végtelen jobboldalnál nem tekintjük a rendszer részének az egyenlőtlenséget. A (p,b) pár *paramoduláris*, ha p szuperoduláris, b szubmoduláris, $p(\emptyset) = b(\emptyset) = 0$ és teljesül a $b(S) - p(T) \geq b(S \setminus T) - p(T \setminus S)$ „kereszt-egyenlőtlenség” minden $S, T \subseteq [n]$ halmazra. A $Q(p,b)$ poliéder *g-polimatroid*, ha (p,b) paramoduláris pár, és az üreshalmazt is g-polimatroidnak tekintjük.

A duális változók a véges p- vagy b-értékű halmazoknak felelnek meg. Egy duális megoldás *tartója* azon halmazok rendszere, amikhez tartozó duális változó értéke pozitív. Egy duális megoldás *lamináris*, ha a tartója lamináris halmazrendszer (azaz bármely két tagja diszjunkt vagy egyikük tartalmazza a másikat).

1.2. Definíció. A (p,b) pár *teljesen duálisan lamináris* (*TDL*), ha minden (primál) célfüggvényhez, amire véges az optimum, létezik lamináris optimális duális megoldás.

1.3. Tétel ([1])**.** *NP-nehéz annak eldöntése, hogy egy rendszer TDL-e.*

1.4. Tétel ([1])**.** *Ha egy P poliéder metszete minden egész g-polimatroiddal egész poliéder, akkor P is egész g-polimatroid.*

1.3. G-polimatroidok felismerése

1.5. Tétel ([1])**.** *Polinomiális algoritmussal eldönthető, hogy egy adott A mátrixra és b vektorra a $\{x :\ Ax \leq b\}$ poliéder g-polimatroid-e.*

1.6. Következmény ([1]). *Polinomiális algoritmussal eldönthető, hogy egy adott* $\{x: \ Ax \leq b\} \cap \cap \{x: \ x([n]) = c\}$ *poliéder bázis-poliéder-e.*

Az 1.5. tétel a teljes dimenziós esetben igazolható az alábbi új karakterizációval. Elég (1) alakú rendszereket tekinteni. Jelölje $\mathcal{B}$ az olyan S halmazok rendszerét, amikre $x(S) \leq b(S)$ az input része, vagis amikre $b(S) \neq +\infty$, és $\mathcal{P}$ azokét, amikre $p(S) \neq -\infty$.

1.7. Tétel ([1]). *Tegyük fel, hogy egy* (p, b) *párra a* $Q(p, b)$ *poliéder teljes dimenziós és legyen* $i(S) := \min_{x \in P} x(S)$ *és* $a(S) := \max_{x \in P} x(S)$*. Ekkor* $Q(p, b)$ *pontosan akkor g-polimatroid, ha*

(i) bármely két $S, T \in \mathcal{B}$ *halmazra,* $a(S \cup T) + a(S \cap T) \leq b(S) + b(T)$ *teljesül,*

(ii) bármely két $S, T \in \mathcal{P}$ *halmazra,* $i(S \cup T) + i(S \cap T) \geq p(S) + p(T)$ *teljesül és*

(iii) bármely $S \in \mathcal{B}$ *és* $T \in \mathcal{P}$ *halmazra,* $a(S \setminus T) - i(T \setminus S) \leq b(S) - p(T)$ *teljesül.*

1.8. Következmény. *Ha* $Q(p, b)$ *teljes dimenziós g-polimatroid, akkor* (p, b) *TDL.*

Az alábbi eredmény segítségével azt is el tudjuk dönteni, hogy egy adott rendszer egész g-polimatroidot határoz-e meg.

1.9. Tétel ([1]). *Tegyük fel, hogy* $Q(p, b)$ *g-polimatroid és* (p, b) *egy minimális leírását adja. Ekkor* $Q(p, b)$ *pontosan akkor egész g-polimatroid, ha* p *és* b *egész és minden olyan halmazra, amin az összeg* $Q(p, b)$*-ben állandó, ez az összeg egész.*

2. Poliéderes Sperner-lemma és alkalmazásai

A harmadik fejezetet a többdimenziós Sperner-lemma néhány poliéderes változatának kimondásával kezdjük. Egy poliéder csúcsainak színezésénél egy lapot *színesnek* mondunk, ha minden színből illeszkedik rá csúcs. Egy poliéder lapjainak színezésénél egy csúcsot *színesnek* mondunk, ha minden színből illeszkedik rá lap. Egy n dimenziós poliéder egy csúcsa *egyszerű*, ha pontosan n lap illeszkedik rá.

2.1. Tétel. *Legyen* P *egy* n*-dimenziós politóp és* F_0 *a* P *egy szimplex lapja. Tegyük fel, hogy* P *csúcsai ki vannak színezve* n *színnel úgy, hogy* F_0 *színes. Ekkor van másik színes lap is.*

2.2. Tétel. *Legyen* P *egy* n*-dimenziós poliéder, aminek karakterisztikus kúpját* n *lineárisan független vektor generálja. Tegyük fel, hogy* P *lapjai ki vannak színezve* n *színnel úgy, hogy az* i*-edik extrém irány színe nem az* i*-edik szín. Ekkor van színes csúcs.*

2.1. A poliéderes Sperner-lemma alkalmazásai

A 2.2. tétel alkalmazásával rövid bitonyítást adunk számos tisztán kombinatorikus és néhány játékelméleti eredményre. Ezen eredmények többsége ismert, de néhányuk és a módszer saját, Király Tamással közös [2, 3].

Kernelek irányított gráfokban

2.3. Definíció. Egy $D = (V, A)$ irányított (multi)gráfban egy $S \subseteq V$ ponthalmaz *kernel*, ha minden S-en kívüli csúcsból vezet él S-be. Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf. A G egy *szuperirányítása* egy olyan $\vec{G}$ irányított gráf, amit úgy kapunk, hogy a G éleit megirányítjuk az egyik vagy mindkét irányba. Egy szuperirányításban egy irányított kör *egyirányú*, ha élei fordított irányban nem szerepelnek a digráfban. Egy $\vec{G}[U]$ feszített részdigráf egy pontja *forráspont* $\vec{G}[U]$-ban, ha minden $G[U]$-beli szomszédjába vezet él belőle, vagyis nincs olyan bele menő él, ami fordítva nem szerepel $\vec{G}[U]$-ban. Egy irányított gráf *klikk-aciklikus*, ha egy klikkje sem tartalmaz egyirányú kört, vagyis minden klikkjében van forráspont. Egy gráf *kernel-megoldható*, ha minden klikk-aciklikus szuperirányításában van kernel.

Berge és Duchet [9] azt sejtették, hogy egy gráf pontosan akkor kernel-megoldható, ha perfekt. Azt az irányt, hogy a perfekt gráfok kernel-megoldhatók, Boros és Gurvich látta be [10] bonyolult játékelméleti eszközökkel. Mi egy rövid bizonyítást adunk, ami a 2.2 tételen alapul.

2.4. Tétel (Boros, Gurvich [10])**.** *Minden perfekt gráf kernel-megoldható.*

A 2.4 tételt általánosítjuk tetszőleges $G = (V, E)$ gráfra, olyan feltételeket téve a szuperirányításra, amik $\mathrm{STAB}(G)$ (a G stabil halmazainak poliédere) lapjaitól függ. Legyen $\vec{G}$ egy szuperirányítása, és legyen $U \subseteq V$ pontok egy halmaza. Azt mondjuk, hogy $\vec{G}$ *egyirányú kör mentes U-ban*, ha $\vec{G}[U]$-ben nincs egyirányú kör.

2.5. Tétel ([2])**.** *Ha* $\mathrm{STAB}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+{}^n : Ax \le b\}$ *valamely nemnegatív A mátrixra és b vektorra, és $\vec{G}$ a G egy olyan szuperirányítása, ami egyirányú kör mentes* $\mathrm{supp}(a)$*-ban az A minden sorára, akkor $\vec{G}$-ben van kernel.*

Egy gráf *h-perfekt*, ha a stabil halmaz poliéderét leírják a következő egyenlőtlenségek:

$$
\begin{aligned}
x_v &\ge 0 && \text{minden } v \in V \text{ pontra,}\\
x(C) &\le 1 && \text{minden } C \text{ maximális klikkre,}\\
x(Z) &\le \frac{|Z|-1}{2} && \text{minden } Z \text{ páratlan lyukra.}
\end{aligned}
$$

Egy digráfot *páratlan-lyuk-aciklikusnak* nevezünk, ha minden páratlan lyuk egyirányú kör.

2.6. Tétel ([2])**.** *Ha $\vec{G}$ egy h-perfekt gráf olyan szuperirányítása, ami klikk-aciklikus és páratlan-lyuk-aciklikus, akkor van benne kernel.*

Egy digráf *kernel-perfekt*, ha minden feszített részdigráfjában van kernel.

2.7. Következmény. *co-NP-ben van annak az eldöntése, hogy egy h-perfekt gráf egy adott szuperirányítása kernel-perfekt-e.*

Scarf lemmája

Scarf [16] belátta, hogy egy kiegyensúlyozott n-személyes NTU-játék magja sosem üres. A bizonyítása egy lemmán alapul, ami egy $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b,\ x \ge 0\}$ korlátos poliéderre vonatkozik, ahol A egy $m \times n$-es nemnegatív mátrix ($\mathbf{0}$ oszlop nélkül) és b egy pozitív $\mathbb{R}^m$-beli vektor. Emellett az A minden $i \in [m]$ sorához adva van egy $<_i$ rendezése az oszlopoknak (vagy az oszlopok egy részhalmazának). A $<_i$ értelmezési tartományát $\mathrm{Dom}(<_i)$-vel jelöljük. Ha $j \in \mathrm{Dom}(<_i)$ és $K \subseteq \mathrm{Dom}(<_i)$, akkor a $j \leq_i K$ jelölést hazsnáljuk arra, hogy $j \leq_i k$ minden $k \in K$-ra.

2.8. Definíció. A P egy x^* csúcsa *dominálja* a j-edik oszlopot, ha van olyan i sor, amire $a_i x^* = b_i$ és $j \leq_i \mathrm{supp}(x^*) \cap \mathrm{Dom}(<_i)$ (amiből következik, hogy $j \in \mathrm{Dom}(<_i)$). A P egy x^* csúcsa *maximális*, ha az x^* bármely koordinátáját növelve kilépünk a P poliéderből (vagy formálisan $(\{x^*\} + \mathbb{R}_+{}^n) \cap P = \{x^*\}$).

2.9. Tétel (Scarf lemmája [16]). *Legyen P egy fenti alakú poliéder és $<_i$ rendezés supp(a_i)-n minden $i \in [m]$-re, ahol a_i az A mátrix i-edik sora. Ekkor P-nek van olyan maximális csúcsa, ami dominál minden oszlopot.*

Az értekezésben belátjuk, hogy Scarf lemmája a P poliéderre lényegében a poliéderes Sperner-lemmának felel meg a $P - \mathbb{R}^n_+$ poliéderre. Ez a Scarf lemma egy új bizonyítását adja.

NTU játékok tört magja

Egy *végesen generált NTU játékban m* játékos van és adott egy véges multihalmaz, aminek $S_j \subseteq [m]$ tagjait *koalícióknak* hívjuk ($j \in [n]$). Az i-edik játékosnak van egy $<_i$ preferencia-sorrendje azon koalíciókon, amikben szerepel; $S_j <_i S_k$ jelöli, ha az i játékos az S_k koalíciót jobban preferálja, mint S_j-t.

Koalíciók egy $\mathcal{S}$ halmaza a játék *magjában* van, ha diszjunktak és minden $\mathcal{S}$-n kívüli S' koalícióhoz van egy olyan $i \in S'$ játékos és egy $S \in \mathcal{S}$ koalíció, hogy $S' <_i S$.

Egy $x \in \mathbb{R}_+{}^n$ vektor a játék *tört magjában* van, ha minden i játékosra $\sum_{j: i \in S_j} x(j) \leq 1$ teljesül, és minden $j \in [n]$-hez van olyan i játékos S_j-ben, akire $\sum_{k: i \in S_k} x(k) = 1$ teljesül és minden olyan k-ra, amire $i \in S_k$ és $x(k) > 0$, $S_j \leqslant_i S_k$. Az $x \in \mathbb{R}_+{}^n$ vektor *megengedett*, ha $\sum_{j: i \in S_j} x(j) \leq 1$ minden i játékosra. A 2.2 tétellel rövid bizonyítást adunk Scarf tételének következő verziójára.

2.10. Tétel (Scarf [16]). *Egy végesen generált NTU játék tört magja sosem üres. Emellett, ha a megengedett vektorok poliédere egész, akkor a mag sem üres.*

A kernelek egy matroidos általánosítása

Fleiner Tamás definiálta a matroid-kernel fogalmát, ami a következőkben ismertetünk. Legyen $\mathcal{M} = \{S, \mathcal{I}, <\}$ egy *rendezett matroid*, vagyis egy matroid az S alaphalmazon, aminek függetlenjeinek rendszere $\mathcal{I}$, és egy $<$-rel jelölt teljes rendezés S-en. Egy rendezett matroidban egy $X \subseteq S$ halmaz *dominálja* az $e \in S$ elemet, ha $e \in X$ vagy van egy olyan $Y \subseteq X$ független halmaz, ami feszíti e (vagyis $Y \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$) és $e < y$ minden $y \in Y$-ra.

A matroid-kernel két rendezett matroidra vonatkozik, amiknek közös az alaphalmazuk; legyenek $\mathcal{M}_1 = \{S, \mathcal{I}_1, <_1\}$ és $\mathcal{M}_2 = \{S, \mathcal{I}_2, <_2\}$ rendezett matroidok. Egy $K \subset S$ halmaz $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-*kernel*, ha $K \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ és minden $e \in S$ elemet dominál legalább az egyik rendezett matroidban.

2.11. Tétel (Fleiner [12]). *Bármely $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ rendezett matroidhoz létezik $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernel.*

Az értekezésben rövid bizonyítást adunk e tételre, amiben a 2.2 tételt a matroid-metszet poliéder alsó burkolójára alkalmazzuk.

Sperner-rendszerek irányítása

Egy *Sperner-rendszer* olyan halmazrendszer, amiben nincs két olyan halmaz, hogy az egyikük tartalmazza a másikat. Egy Sperner-rendszer *ideális*, ha a fedési poliédere egész. A módszerünket használva a következő új eredményt kapjuk.

2.12. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egy ideális Sperner-rendszer az $[n]$ alaphalmazon és legyen $\mathcal{B}$ a blokkere. Ekkor nincsenek olyan $p : \mathcal{A} \to S$ és $q : \mathcal{B} \to S$ függvények, amikre $p(A) \in A\ \forall A \in \mathcal{A}$, $q(B) \in B\ \forall B \in \mathcal{B}$ és ha valamely $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ halmazra $p(A) = q(B)$, akkor $|A \cap B| > 1$.*

Stabil folyamok

A stabil folyam problémánál adott egy hálózat egy $D = (V, A)$ digráffal, $s, t \in V$ pontokkal és $c \in \mathbb{R}_+{}^A$ kapacitásokkal, és minden v csúcshoz a v-re illeszkedő élek egy $\leq_v$-vel jelölt teljes rendezésével. Ezt a rendezésekkel ellátott hálózatot *preferenciás hálózatnak* nevezzük.

Egy *gyökeres kör* egy olyan irányított kör, aminek egyik csúcsa ki van jelölve, mint kezdőpont; tekinthető egy útnak, aminek végpontja a kezdőpontja. Legyen f egy folyam a (D, s, t, c) hálózatban. Azt mondjuk, hogy egy $P = (v_1, a_1, v_2, a_2, \ldots, a_{k-1}, v_k)$ út vagy gyökeres kör *blokkolja* f-et, ha a következők teljesülnek:

(i) $v_i \neq s, t$ ha $i \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$,

(ii) minden a_i él telítetlen f-ben,

(iii) $v_1 = s$ vagy $v_1 = t$ vagy létezik olyan $a' = v_1u$ él, amire $f(a') > 0$ és $a' <_{v_1} a_1$,

(iv) $v_k = s$ vagy $v_k = t$ vagy létezik olyan $a'' = wv_k$ él, amire $f(a'') > 0$ és $a'' <_{v_1} a_{k-1}$.

Egy f folyam *stabil*, ha nincs őt blokkoló út vagy gyökeres kör. Új bizonyítást adunk Fleiner következő tételére, amiben a 2.2 tételt egy exponenciális dimenziós poliéderre alkalmazzuk.

2.13. Tétel (Fleiner [13]). *Minden preferenciás hálózatban van stabil folyam. Ha a kapacitások egészek, akkor egész stabil folyam is van.*

2.2. Fordított irányú állításokról

Az erős perfekt gráf tételből következik, hogy a Berge és Duchet sejtésének másik iránya is igaz, vagyis hogy minden kernel-megoldható gráf perfekt. Így felmerül az a kérdés, hogy a 2.2. tétel többi alkalmazásának – netán magának a tételnek – fordított iránya is igaz-e. Először megmutatjuk, hogy a 2.6. tétel megfordítása nem igaz.

2.14. Állítás ([3]). *Létezik olyan gráf, ami nem h-perfekt, de minden klikk- és páratlan-kör-aciklikus szuperirányításában van kernel.*

A poliéderes Sperner lemma megfordítására is ellenpéldát adunk.

2.15. Állítás ([3]). *Van olyan 4-dimenziós P poliéder, és két különböző csúcsa, x^1 és x^2, hogy x^1 egyszerű csúcs és P lapjait nem lehet úgy kiszínezni 4 színnel, hogy csak x^1 és x^2 színes csúcs.*

Ezt az ellenpéldát használva a Scarf-lemma megfordítására is tudunk ellenpéldát adni.

2.16. Állítás ([3]). *Van olyan $P = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ korlátos poliéder (ahol A $m \times n$-es nemnegatív mátrix és $b \in \mathbb{R}^m$ pozitív vektor), és a P-nek egy x^* csúcsa, hogy bárhogy adunk meg rendezéseket az A sorainak tartóin, lesz egy x^*-tól különböző maximális csúcs, ami minden oszlopot dominál.*

Az alábbi egy pozitív részeredmény a Sperner-rendszerek irányításával kapcsolatban.

2.17. Tétel. *A 2.12 tétel megfordítása teljesül, ha $\mathcal{A}$-nak van olyan minorja, aminek magja ciklikus.*

2.3. PPAD-teljesség

Az alábbiak a 2.1. és a 2.2. tétel számítási verziói.

POLITÓPOS SPERNER:.

Bemenet:. $v^i \in \mathbb{Q}^n$ $(i = 1, \dots, m)$ vektorok, amiknek konvex burka egy teljes dimenziós P poliéder, a csúcsok n színnel való színezése valamint egy F_0 színes szimplex-lapja P-nek.

Kimenet:. $v^{i_1}, \dots, v^{i_n}$ affin független vektorok, amik különböző színűek és egy lapon helyezkednek el, ami nem F_0.

EXTRÉM IRÁNYOS SPERNER:.

Bemenet:. egy $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ mátrix és egy $b \in \mathbb{Q}^m$ vektor, amikre $P = \{x : Ax \leq b\}$ olyan csúcsos poliéder, aminek karakterisztikus kúpját n lineárisan független vektor generálja; a P lapjainak n színnel való színezése, aminél az i-edik extrém irány színe nem az i-edik szín.

Kimenet:. a P egy színes csúcsa.

2.18. Tétel ([5]). *A* POLITÓPOS SPERNER *és az* EXTRÉM IRÁNYOS SPERNER *feladatok PPAD-teljesek.*

3. Ideális halmazfüggvények

Az értekezés negyedik fejezetében kiterjesztjük az idealitást és kapcsolódó fogalmakat halmazrendszerekről halmazfüggvényekre, és belátjuk, hogy számos tulajdonság kiterjed. Példákat is mutatunk újfajta nemideális struktúrákra. Király Tamással közös munka [4].

3.1. Graduális halmazfüggvények

Legyen V egy véges alaphalmaz, és $f : 2^V \to \mathbb{Z}$ egy egészértékű halmazfüggvény, amire $f(X) \leq f(X+v) \leq f(X)+1$ teljesül minde $X \subsetneq V$ halmazra és $v \in V \setminus X$ elemre. Az ilyen halmazfüggvényeket *graduálisnak* nevezzük. Az f *blokkere* a $b(f)(X) := -f(V \setminus X)$ halmazfüggvény, ami szintén graduális. Nyilván $b(b(f)) = f$.

Egy f graduális halmazfüggvényre és egy $v \in V$ elemre a következő két minor-műveletet definiáljuk, ami egy $V - v$ alaphalmazú graduális halmazfüggvényt eredményez:

***törlés*:.** $f\backslash v(X) := f(X)$ minden $X \subseteq V - v$-re,
***összehúzás*:.** $f/v(X) := f(X+v)$ minden $X \subseteq V - v$-re.

A function f' is a *minor* of f if it can be obtained from f using deletions and contractions.

3.1. Állítás. *If f is gradual, then its minors are also gradual.*

3.2. Állítás. *For any gradual function f, $b(f\backslash v) = b(f)/v$ and $b(f/v) = b(f)\backslash v$.*

3.2. Polyhedra of gradual functions

We assign the following $(n+1)$-dimensional polyhedra to a gradual set function f:

$$P(f) := \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ 0 \le y \le 1,\ y(X) - \beta \ge f(X) \text{ for every } X \subseteq V\},$$
$$Q(f) := \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ y \ge 0,\ y(X) - \beta \ge f(X) \text{ for every } X \subseteq V\},$$
$$R(f) := \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ y(X) - \beta \ge f(X) \text{ for every } X \subseteq V\}.$$

3.3. Állítás. *If f is a gradual set function, then $Q(f) = P(f) + \mathbb{R}^n_+$.*

3.4. Állítás. *For a gradual function f, $\mathrm{vert}(P(f)) \supseteq \mathrm{vert}(Q(f)) \supseteq \mathrm{vert}(R(f))$.*

3.5. Állítás. *For any gradual function f, the following hold:*

$$P(f\backslash v) = \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^{n-1+1} : (y,1,\beta) \in P(f)\}, \text{ and}$$

$$P(f/v) = \{(y,\beta) \in \mathbb{R}^{n-1+1} : (y,0,\beta) \in P(f)\},$$

that is, both $P(f\backslash v)$ and $P(f/v)$ are facets of $P(f)$.

3.3. Ideal gradual set functions

3.6. Definíció. The gradual set function f is called *ideal* if the polyhedron $P(f)$ is integral.

For a gradual set function f, let us define the following finite set of vectors in $\mathbb{R}^{n+1}$: $S(f) := \{(\chi_X, f(X)) :\ X \subseteq V\}$. We denote the set $S(f) - \mathrm{cone}\{(\mathbf{0}, -1)\}$ by $S^{\downarrow}(f)$. We note that the idealness of f is equivalent to $P(f) = \mathrm{conv}\{S^{\downarrow}(b(f))\}$.

3.7. Tétel. *For a gradual set function, the following are equivalent:*
(i) f *is ideal, that is,* $P(f) = \mathrm{conv}\{S^{\downarrow}(b(f))\}$
(ii) $b(f)$ *is ideal, that is,* $P(b(f)) = \mathrm{conv}\{S^{\downarrow}(f)\}$
(iii) $R(f)$ *is an integer polyhedron,*
(iv) $Q(f)$ *is an integer polyhedron*

3.8. Állítás. *If f is ideal, then any minor of it is also ideal.*

3.9. Definíció. A gradual set function is called *minimally nonideal* (*mni*) if it is not ideal but every minor of it is ideal.

3.4. Twisting

3.10. Definíció. Let f be a gradual set function on ground set V, and let U be a subset of V. The *twisting of f at U* is the set function f^U on ground set V defined by

$$f^U(X) := f(X \Delta U) + |X \cap U|.$$

3.11. Állítás. *Every twisting of a gradual set function is a gradual set function.*

3.12. Állítás. *For a set $U \subseteq V$ and an element $v \in V$ the following hold.*

$$(f \backslash v)^{U-v} \cong \begin{cases} f^U / v & \text{if } v \in U, \\ f^U \backslash v & \text{if } v \notin U, \end{cases} \qquad (f / v)^{U-v} \cong \begin{cases} f^U \backslash v & \text{if } v \in U, \\ f^U / v & \text{if } v \notin U. \end{cases}$$

3.13. Állítás. *Every twisting of an ideal or mni set function is also ideal or mni, respectively.*

3.5. Examples

Clutters

Let $\mathcal{C}$ be a clutter on ground set V. Let $\mathcal{C}^\uparrow$ denote the uphull of $\mathcal{C}$, that is, $\{X \subseteq V : \exists C \in \in \mathcal{C} : C \subseteq X\}$. We associate the gradual set function $f_\mathcal{C}$ to $\mathcal{C}$ which is 1 on the sets in $\mathcal{C}^\uparrow$ and 0 otherwise. It is easy to check that this works well with the minor operations: for any $v \in V$, $f_{\mathcal{C}\backslash v} = f_\mathcal{C} \backslash v$ and $f_{\mathcal{C}/v} = f_\mathcal{C}/v$. Likewise, one can check that the blocker $b(f_\mathcal{C})$ is a translation of the set function corresponding to the blocker of $\mathcal{C}$, namely $f_{b(\mathcal{C})}$.

3.14. Állítás. *A clutter $\mathcal{C}$ is ideal / mni if and only if $f_\mathcal{C}$ is ideal / mni.*

Matroid rank functions

3.15. Állítás. *Both the rank function and the corank function of a matroid are ideal.*

Nearly bipartite graphs

For a graph $G = (V, E)$ let f_G be the gradual set function on V which is 0 on the emptyset, 1 on the stable sets of G and 2 otherwise. The graph G is called *nearly bipartite* if for every node v, the graph $G[V - N(v)]$ is bipartite, where $N(v)$ is the closed neighbourhood of v.

3.16. Állítás. *Let f be a gradual function with values in $\{0, 1, 2\}$ such that $f(\emptyset) = 0$ and $f(v) = 1$ ($\forall v \in V$). Then f is ideal if and only if $f = f_G$ for a nearly bipartite graph G.*

A class of mni gradual set functions

3.17. Állítás. *The following gradual functions are mni, if $n \geq 3$:*

$$\theta_n(X) := \begin{cases} 0 & \text{if } X = \emptyset, \\ 2 & \text{if } X = V, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad \overline{\theta}_n(X) := \begin{cases} 0 & \text{if } X = \emptyset, \\ n-2 & \text{if } X = V, \\ |X| - 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

An mni set function with non-simple fractional vertex

If an mni set function $f_\mathcal{C}$ is defined by an mni clutter $\mathcal{C}$, then $Q(f_\mathcal{C})$ has a unique fractional vertex and it is simple. This does not hold however for arbitrary mni set functions; in the thesis we give an example f on a 5-element ground set for which the unique fractional vertex of $Q(f)$ is not simple.

3.6. Convex and concave gradual extensions

Let g be a function on a box B in $\mathbb{R}^n$. We call g *gradual* if for every $x, z \in B$ for which $x \leq z$, $g(x) \leq g(z) \leq g(x) + \|z - x\|_1$ holds. We consider gradual extensions of a gradual set function f to the unit cube $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}\}$.

3.18. Állítás. *The maximal convex extension of a gradual set function f to the unit cube $\{x \in \mathbb{R}^n : : \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}\}$ is*

$$\hat{f}(z) := \min\{\sum_{Y \subseteq V} \lambda_Y f(Y) : \lambda_Y \geq 0 \ \forall Y \subseteq V, \sum_{Y \subseteq V} \lambda_Y = 1, \sum_{Y \subseteq V} \lambda_Y \chi_Y = z\},$$

which is moreover gradual. The minimal convex gradual extension of f to the unit cube is

$$\tilde{f}(z) := \max\{f(Y) + z(Y) - |Y| : Y \subseteq V\}.$$

3.19. Tétel. *For a gradual set function f, the following are equivalent.*

(i) *f is ideal,*

(ii) *f has a unique convex gradual extension to the unit cube,*

(iii) *f has a unique concave gradual extension to the unit cube,*

(iv) *there exist set functions u and l for which*

$$\begin{aligned} \mathrm{conv}(S(f)) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad & \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}, \\ & x(Y) - \alpha \leq u(Y) \quad \forall Y \subseteq V, \\ & x(Y) - \alpha \geq l(Y) \quad \forall Y \subseteq V \ \}, \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \mathrm{conv}(S(f)) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad & \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}, \\ & x(Y) - \alpha \leq |Y| - f(Y) \quad \forall Y \subseteq V, \\ & x(Y) - \alpha \geq b(f)(Y) \quad \forall Y \subseteq V \ \}. \end{aligned}$$

The thesis is based on the following publications

[1] András Frank, Tamás Király, Júlia Pap, and David Pritchard. Characterizing and recognizing generalized polymatroids. Preprint.

[2] Tamás Király and Júlia Pap. A note on kernels and Sperner's lemma. *Discrete Applied Mathematics*, 157(15):3327–3331, 2009.

[3] Tamás Király and Júlia Pap. Kernels, stable matchings, and Scarf's lemma. In S. Iwata, editor, *Combinatorial Optimization and Discrete Algorithms*, volume B23 of *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, pages 131–145, 2010.

[4] Tamás Király and Júlia Pap. Ideal set functions. In *Proceedings of the 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and its Applications, Kyoto*, pages 332–340, 2011.

[5] Tamás Király and Júlia Pap. PPAD-completeness of polyhedral versions of Sperner's lemma. Technical Report QP-2012-01, Egerváry Research Group, Budapest, 2012. http://www.cs.elte.hu/egres/qp/egresqp-12-01.pdf.

[6] Júlia Pap. A note on a conjecture on clutters. Technical Report TR-2010-09, Egerváry Research Group, Budapest, 2010. http://www.cs.elte.hu/egres/tr/egres-10-09.pdf.

[7] Júlia Pap. Recognizing conic TDI systems is hard. *Mathematical Programming*, 128:43–48, 2011.

References

[8] Ron Aharoni and Tamás Fleiner. On a lemma of Scarf. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 87(1):72–80, 2003.

[9] Claude Berge and Pierre Duchet. Recent problems and results about kernels in directed graphs. *Discrete Mathematics*, 86(1-3):27–31, 1990.

[10] Endre Boros and Vladimir Gurvich. Perfect graphs are kernel solvable. *Discrete Mathematics*, 159(1):35–55, 1996.

[11] Guoli Ding, Li Feng, and Wenan Zang. The complexity of recognizing linear systems with certain integrality properties. *Mathematical Programming*, 114:321–334, 2008.

[12] Tamás Fleiner. *Stable and Crossing Sctructures*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2000. http://www.renyi.hu/~fleiner/dissertation.pdf.

[13] Tamás Fleiner. On stable matchings and flows. In D. Thilikos, editor, *Graph Theoretic Concepts in Computer Science*, volume 6410 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 51–62. Springer Berlin / Heidelberg, 2010.

[14] András Frank. Generalized polymatroids. In A. Hajnal, L. Lovász, and V. T. Sós, editors, *Finite and Infinite Sets (Proc. 6th Hungarian Combinatorial Colloquium, 1981)*, volume 37 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 285–294. North-Holland, 1984.

[15] Christos H. Papadimitriou and Mihalis Yannakakis. On recognizing integer polyhedra. *Combinatorica*, 10:107–109, 1990.

[16] Herbert E. Scarf. The core of an n person game. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 50–69, 1967.

[17] Jimmy J.M. Tan. A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. *Journal of Algorithms*, 12(1):154–178, 1991.