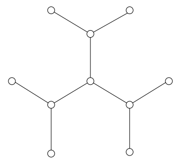
9. kombinatorikus algoritmusok II. gyakorlat, 2010. április 16.

1. Mi az Edmonds-algoritmus által adott gát
   (a) egy olyan gráfban, amiben van teljes párosítás?
   (b) egy páros hosszú útban?
   (c) egy páratlan hosszú körben?
   (d) ebben a gráfban:



2. Legyen $G = (V_1, V_2; E)$ egy páros gráf, az Edmonds-Gallai felbontása A, C, D, és legyen A_i, C_i, D_i az A, C, illetve D V_i-be eső része. Bizonyítsd be, hogy
   (a) D független ponthalmaz
   (b) $|C_1| = |C_2|$
   (c) $\Gamma(D_1) = A_2$, $\Gamma(D_2) = A_1$
   (d) minden M maximális párosítás $G[C_1 \cup C_2]$-ben teljes párosítás, valamint A_1-et D_2-be, A_2-t D_1-be párosítja M.
3. Legyen egy G gráfban $A, B \subset V$ olyan, hogy $|A| < |B|$, és van A-t elkerülő maximális párosítás, és B-t elkerülő is. Mutasd meg, hogy ekkor van olyan maximális párosítás, ami elkerüli A-t és legalább egy pontot $B \setminus A$-ból.
4. Albert és Bálint a következő játékot játszák: egy gráfban egy utat építenek úgy, hogy felváltva veszik hozzá a következő pontot. Aki nem tud lépni, az veszít. Kinek van nyerő stratégiája?
5. G egyszerű gráf, n páros, és $m > \binom{n-1}{2}$ (m az élszám). Mutasd meg, hogy G-ben van teljes párosítás!
6. (a) Bizonyítsd be, hogy a minimális lefogó élhalmaz mérete $+$ a maximális párosítás mérete $= n$.
   (b) Bizonyítsd be, hogy a minimális lefogó ponthalmaz mérete $+$ a maximális stabil ponthalmaz mérete $= n$.
7. Legyen egy G gráf *hiánya*: $\mathrm{def}(G) := n - 2\nu(G)$ (vagyis egy maximális párosítás által fedetlen pontok száma). Mutasd meg, hogy minden X ponthalmazra $\mathrm{def}(G - X) \leq \mathrm{def}(G) + |X|$!
8. Egy gráfban egy Y ponthalmaz *extrém*, ha $\mathrm{def}(G - Y) = \mathrm{def}(G) + |Y|$.
   (a) Minden gát extrém, de fordítva nem feltétlen.
   (b) Extrém halmaz része is extrém.
   (c) Ha Y extrém G-ben, és Z extrém $G - Y$-ban, akkor $Y \cup Z$ extrém G-ben.
9. **Beadandó**: Bizonyítsd be, hogy van olyan X gát, amelyre $G - X$ minden komponense faktorkritikus.