5. kombinatorikus algoritmusok II. gyakorlat, 2010. március 12.

Minimális költségű m-áram feladat:
Adott: $D = (V, A)$ irányított gráf, $f : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ és $g : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alsó illetve felső korlátok az éleken, $m : V \to \mathbb{R}$ előírás, és $c : A \to \mathbb{R}$ költségek. Feltesszük, hogy van megengedett m-áram, vagyis olyan $x : A \to \mathbb{R}$, hogy $f(e) \leq x(e) \leq g(e)$ minden $e \in A$ élre és $\varrho_x(v) - \delta_x(v) = m(v)$ minden $v \in V$ csúcsra.
Keresünk: minimális költségű m-áramot (x költsége: $\sum_{e\in A} c(e)x(e)$)

1. Mutasd meg, hogy feltehető, hogy $f \equiv 0$ és $g \equiv +\infty$!

2. Tegyük fel, hogy $f \equiv 0$ és $g \equiv +\infty$, és legyen x megengedett m-áram. A D_x segédgráf álljon az összes uv A élből (előre élek) és az olyan vu élekből, amire $uv \in A$ és $x(uv) > 0$. Ekkor ekvivalensek:

   (a) x min. költségű

   (b) D_x-ben nincs negatív kör c'-re nézve, ahol $c'(e) = \begin{cases} (e) \text{ ha } e \text{ előre él} \\ -c(e) \text{ ha } e \text{ hátra él} \end{cases}$

   (c) $\exists \pi : V \to \mathbb{R}$: $c_\pi(uv) \geq 0$ minden $uv \in A$ élre és $x(uv) > 0$-ra $c_\pi(uv) = 0$, ahol $c_\pi(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$ ("eltolt költség")
   (Emlékeztető: ha $D = (V, A)$ irányított gráf és $d : A \to \mathbb{R}$, akkor d-re pontosanakkor nincs negatív kör, ha $\exists \pi : V \to \mathbb{R}$: $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ minden $uv \in A$ élre (π neve: megengedett potenciál))

3. Ha nem korlátos a célfüggvény, akkor D_x-ben van olyan c'-re negatív kör, amin korlátlanul javíthatunk.

4. **Beadandó**: Van olyan x minimális költségű áram, amire azok az e élek, ahol $f(e) < x(e) < g(e)$, egy erdőt alkotnak.