2. kombinatorikus algoritmusok II. gyakorlat, 2010. február 17.

1. (a) Bizonyítsd be, hogy egy hálózatban minimális vágások metszete és uniója is minimális vágás!
   (b) Mutasd meg, hogy a javító utas algoritmusnál kapott S minimális vágás az egyértelmű legszűkebb minimálsi vágás!
2. Adott egy hálózat, és benne egy x maximális folyam. Keressünk minimális vágást $O(m)$ időben!
3. Adj algoritmus, amely eldönti, hogy egy hálózatban a minimális vágás egyértelmű-e (mint ponthalmaz)!
4. Adott egy hálózat és benne egy e él. Adj algoritmust, ami eldönti, hogy
   (a) van-e olyan max. folyam, ami telíti e-t,
   (b) minden max. folyam telíti-e e-t!
5. Adott egy hálózat ($D = (V, A)$, $s, t \in V$, $g : A \mapsto \mathbb{R}_+$), határozd meg
$$\min_{s \in X \subseteq V-t} \{\delta_g(X) - \varrho_g(X)\} \text{ -et!}$$
6. Mutasd meg, hogy
$$\max_{P\ s-t \text{ út}} \min_{e \in P} c_e = \min_{S\ s\bar{t} \text{ vágás}} \max_{e \in S} c_e.$$

Beadandó feladat:

7. Áramfeladat visszavezetése folyamra: $D = (V, A)$ irányított gráf, $f \leq g$ véges alsó ill. felső korlátok az éleken. Legyen $v \in V$-re $\lambda(v) := \varrho_f(v) - \delta_f(v)$. Legyen $S := \{v : \lambda(v) > 0\}$, $T := \{v : \lambda(v) < 0\}$, $M := \sum_{v \in S} \lambda(v)$.
   Nézzük a következő hálózatot: D-hez hozzávesszük az új s és t pontokat, s-ből S-be, t-be T-ből vezetünk éleket, és a kapacitások legyenek:
   $g'(sv) := \lambda(v)$ $(v \in S)$,
   $g'(vt) := -\lambda(v)$ $(v \in T)$,
   $g'(a) := g(a) - f(a)$ $(a \in A)$.
   Bizonyítsd be, hogy
   (a) ha x M nagyságú folyam, akkor $f + x$ megengedett áram D-ben,
   (b) ha $\delta_{g'}(X \cup \{s\}) < M$, $(X \subseteq V)$, akkor X megsérti a Hoffmann-feltételt. (Hoffmann tétel: $\exists$ megengedett áram $\Leftrightarrow$ $\varrho_f(X) \leq \delta_g(X)$ $\forall X \subseteq V$.)