Játékelmélet jegyzet

Végh László (veghal@cs.elte.hu)
Pap Júlia (papjuli@cs.elte.hu)

2013. január 8.

Bevezetés

Játékelmélet alatt sok, egymással lazán vagy szorosabban összefüggő területet értünk; a félévben ezek közül hármat fogunk érinteni. Az 1. fejezet kombinatorikus játékokról szól: ide tartoznak olyan népszerű táblajátékok is, mint a sakk vagy a go. Belátunk egyrészt igen általános eredményeket, mint például azt, hogy a sakkban vagy kell legyen az egyik játékosnak nyerő, vagy mindkettőnek nem vesztő stratégiája (de nem tudjuk, ezek közül melyik teljesül). Emellett megadjuk néhány egyszerű kombinatorikai játék teljes elemzését is. A fejezet témái és tárgyalásmódja a *Véges matematika* tárgyhoz kapcsolódnak szorosan: elemi, ám olykor igen ravasz kombinatorikai megfontolásokkal találkozunk.

A 2. fejezet a stratégiai játékokra vonatkozó alaperedményeket mutat be. Ez számít a játékelmélet központi területének és szolgál a közgazdaságtan legfontosabb matematikai alapjaként. Megszületését hagyományosan Neumann János és Oskar Morgenstern *Játékelmélet és gazdasági viselkedés* című könyvének 1944-es megjelenéséhez kötik. Fő kérdésfeltevése olyan szituációk elemzése, amelyekben egymással érdekellentétben álló, racionálisan cselekvő egyének hoznak döntéseket. Ilyenre a legkülönbözőbb kontextusokban láthatunk példákat. A fejezet egyes részeihez szükséges a lineáris programozás alapjainak *Operációkutatásban* tanult ismerete.

A harmadik fő terület a mechanizmustervezés (3. fejezet): osztozkodási folyamatok, társadalmi döntések igazságos meghozatalát biztosító eljárások tervezése. Amellett, hogy megtanulunk igazságosan elosztani egy pizzát illetve megmutatjuk, hogyan hozhatóak létre stabil párkapcsolatok, fontos lehetetlenségi eredményekkel is szembesülünk, például azzal, hogy nem lehet igazságos választásokat rendezni.

A jegyzet anyagán túl az alábbi irodalmak szolgálhatnak kiindulásul:

– *E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy*, Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 1., *A K Peters, Wellesley, MA, 2001* – Az 1. fejezethez

– *Csákány B.*, Diszkrét matematikai játékok, *Polygon Könyvtár, Szeged, 2005* – Az 1. fejezethez.

– *N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, V. V. Vazirani*, Algorithmic Game Theory, *Cambridge University Press, New York, 2007*, www.cambridge.org/journals/nisan/downloads/Nisan_Non-printable.pdf – A 2. és 3. fejezetekhez.

– *David Pritchard*, Game Theory and Algorithms, *órajegyzet*: www.cs.princeton.edu/~dp6/gta/

– *Forgó F., Pintér M., Simonovits A., Solymosi T.*, Játékelmélet, *elektronikus jegyzet:* web.uni-corvinus.hu/~pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf – A 2. fejezethez.

– *Y. Peres*, Game Theory, Alive, *elektronikus jegyzet:* www.stat.berkeley.edu/users/peres/gtlect.pdf. – Az összes fejezet anyaga megtalálható benne.

– *T. S. Ferguson*, Game Theory *elektronikus jegyzet:* www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html – szintén..

– *Jankó Zs.*, Stabil párosítások és egyetemi felvételi ponthatárok, *BSc szakdolgozat, ELTE 2009*, a 3.4-3.5. fejezetekhez.

– További elektronikus jegyzetek minden mennyiségben: `www.gametheory.net/lectures/level.pl`.

1. Kombinatorikus játékok

Kombinatorikus játékok alatt kétszemélyes játékokat fogunk érteni, ahol a játékosok felváltva lépnek. Ebbe az osztályba tartoznak az olyan népszerű táblajátékok, mint a sakk, a malom vagy a go. A pontos definíció megadása előtt néhány könnyen kielemezhető példával kezdünk.

A **nim** játékban adott egy kupacban n kavics. Két játékos felváltva lép: minden lépésben a soron következő játékos egy, kettő vagy három kavicsot vehet el; az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Könnyen látható, hogy pontosan akkor van az első játékosnak nyerő stratégiája, ha n nem osztható 4-gyel. Ilyenkor ugyanis tud úgy lépni, hogy a kavicsok számát néggyel oszthatóvá tegye; ellenben ha a kavicsok száma néggyel osztható, tetszőleges lépés elrontja ezt a tulajdonságot.

Következő játékunkban adott két kupacnyi kavics. A soron következő játékos kiválasztja az egyik kupacot, és abból egyet vagy többet elvesz. Az veszt ismét, aki nem tud lépni. Kinek van nyerő stratégiája?

1.1. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha a két kupacban ugyanannyi kavics van, akkor a második játékos mindig tud nyerni, minden egyéb esetben pedig a másodiknak van nyerő stratégiája!*

Három kupac esetére már jóval bonyolultabb a válasz; később azonban tetszőleges számú kupacra is megadjuk a nyerő stratégiákat.

Addig is, barátkozhatunk a játékkal online játszható változatokban: `www.dotsphinx.com/games/nim` illetve `www.chlond.demon.co.uk/Nim.html/`.

Az eredeti nim általánosítható a következő módon. Adott pozitív egészeknek egy S halmaza, és a soron következő játékos mindig S-beli számú kavicsot kell elvegyen. Az veszt, aki nem tud lépni. (Az eredeti példában $S = \{1,2,3\}$.) Hány kavicsnál kinek van nyerő stratégiája?

Ennek megválaszolásához a nemnegatív egészeket két osztályba szeretnénk sorolni: K-ba azokat tesszük, ahol a soron következő játékosnak van nyerő stratégiája, E-be pedig azokat, ahol az előzőnek. Világos, hogy $0 \in E$, továbbá E-be kell soroljunk minden olyan számot is, amely minden S-beli számnál kisebb. Az ezeknél nagyobb számokat növekvő sorrendben soroljuk be E-be vagy K-ba.

Legyen n a soron következő szám; tegyük fel, hogy minden n-nél kisebb értéket már besoroltunk. Ha létezik olyan $s \in S$, amelyre $n - s \in E$, akkor n-et K-ba soroljuk be, hiszen ekkor tud olyat lépni, ahonnan az indukció szerint már nyerni tud. Ha minden $s \in S$-re $n - s \in K$, akkor viszont n-et E-be soroljuk be, ekkor ugyanis bárhogy lép, a másik játékosnak lesz nyerő stratégiája. Az első játékos nyerő állásai a K-beliek. Nyerő stratégiája az, hogy mindig E-belibe lép. Innen a második játékos a konstrukció miatt kénytelen újra K-belibe lépni.

Mindezen játékoknak a **betli** változata is értelmes: ebben nem nyer, hanem éppenhogy veszt az, aki utoljára lép.

1.2. feladat. *Határozzuk meg az eddigi példák betli változatainak nyerő stratégiáit!*

1.3. feladat. *A* **mérgezett csoki** *játékban egy $n \times m$-es tábla csoki bal alsó kockája mérgezett: aki ezt megeszi, elveszti a játékot (sőt, az életét is). A soron következő játékos kiválaszthatja a maradék csokidarab egy kockáját, és leharapja azt, valamint az összes tőle jobbra és felfele levő kockát. Bizonyítsuk be, hogy $n \times n$-es és $2 \times n$-es táblák esetén a kezdő mindig tud nyerni! Mi a nyerő stratégiája?*

A fenti példák után megadjuk a **kombinatorikus játékok** egy általános definícióját. Az alábbi tulajdonságokat követeljük meg.

– **Kétszemélyes** és **szekvenciális**: a két játékos felváltva lép.

– Adott egy (P, L) irányított gráf. P a lehetséges pozíciók (esetleg végtelen) halmaza. Egy pontból kiinduló élek a lehetséges lépéseknek felelnek meg. Teljesítenie kell a következőknek:

- A játék **végesfokú**: minden állásból csak véges sok másikba lehetséges lépni, vagyis a gráfban minden pont kifoka véges;
- A játék **véges**: tetszőleges állásból véges sok lépésen belül véget ér a játék, akárhogy is játszanak, vagyis nincs végtelen hosszú irányított séta a gráfban.

– Általában (például ha ténylegesen játszanak a játékosok) adott egy p_0 kezdőállás is, ami lehet egy konkrét állás (mint a sakknál) vagy egy tetszőleges P-beli állás, a játék paramétereként.

– A játéknak három lehetséges kimenetele van: vagy az egyik játékos nyer és a másik veszt, vagy pedig döntetlen. A játék végállapotai a nyelők: azon elemei P-nek, ahonnan nem vezet kifele él. Legyen $D \subseteq P$ nyelők egy kitüntett részhalmaza. Ha az utolsónak lépő játékos D-beli pozícióba lép, a játék döntetlennel ér véget. Egyéb esetben az a játékos nyer, aki az utolsó lépést teszi meg. **Éles**nek nevezzük a játékot, ha nincsen döntetlen, vagyis $D = \emptyset$.

Ezt a modellt, amikor az utolsónak lépő játékos nyer, **normál** játéknak nevezzük. **Betli** játék esetén éppen fordítva, az nyer, aki nem tud lépni. Vegyük észre, hogy a betli játékok is modellezhetők normál játékokkal: vegyünk fel egy új t nyelőt, és minden nem D-beli nyelőből húzzunk egy élt t-be.

Ha tetszőleges kezdőállást megengedünk, akkor a játékot **személytelennek** nevezzük. **Partizán** játékokban a két játékos szerepe különböző: adott a pozíciók egy (P_1, P_2) partíciója. A P_i elemei az i. játékos pozícióinak felelnek meg. P_1-beli állásból csak P_2-belibe lehet lépni, P_2-beliből pedig csak P_1-belibe. Csak $p_0 \in P_1$ kezdőpozíciókat engedünk meg. A sakk például partizán játék, mivel ugyanabból a táblaállásból más táblaállásokba mehetünk át attól függően, hogy melyik játékos következik.

Vizsgáljuk meg ezt a példát kicsit közelebbről! Első közelítésben pozíciónak a tábla egy lehetséges állását tekintjük, azzal a plusz információval, hogy melyik játékos következik. (Egyes pozíciókból tehát csak a sötét, a többiből csak a világos játékos számára adott lépési lehetőség.) Ebben az esetben a játék nem lenne véges, mivel ugyanaz az állás végtelen sokszor megismétlődhetne. A sakk végességét két szabály garantálja: a játék döntetlennel végződik, ha háromszor is bekövetkezik ugyanaz a táblaállás, vagy ha ötven lépés során nem történik ütés vagy gyaloglépés. Ezen szabályokat is figyelembe véve, a pozíciónak a táblaálláson és a következő játékos megnevezésén kívül tartalmaznia kell azt az információt, hogy az adott állás hányszor szerepelt, és hogy mikor történt legutóbb ütés vagy gyaloglépés (és még pár további információt, pl. történt-e már sáncolás).

Stratégia alatt egy $P \to P$ függvényt értünk, amely minden P-beli helyzethez, amelyik nem nyelő, hozzárendeli az egyik ki-szomszédját: vagyis tetszőleges álláshoz hozzárendelünk egyet a lehetséges lépések közül. Egy játékos követi az adott stratégiát, ha mindig a stratégia által kijelölt pozícióba lép. **Nyerő** egy stratégia, ha őt követve mindig nyerni tudunk, akármit is lépjen közben a másik játékos. A következő tétel a kombinatorikus játékelmélet alaptételének tekinthető. A bizonyítás módszere a bevezető gondolatmenet általánosítása, a **visszafejtés** (angolul **backward tracking**).

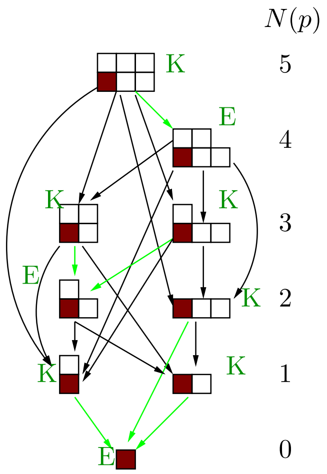
1.4. tétel. *Minden éles kombinatorikus játékban pontosan az egyik játékosnak van nyerő stratégiája. Minden kombinatorikus játékban vagy az egyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van nem vesztő stratégiája.*

Bizonyítás. Nyilván nem lehet mindkét játékosnak nyerő stratégiája, hiszen ekkor ha mindketten a nyerő stratégiájuk szerint játszanának, akkor mindkettejük nyerne, ami lehetetlen. Szükségünk lesz az alábbi lemmára:

1.5. lemma. *Minden p pozícióra létezik egy $N(p)$ szám, hogy p-ből indulva $N(p)$ lépésen belül mindenképp véget ér a játék.*

1.6. megjegyzés. *A definícióban a végesség csak annyit tételez, hogy tetszőleges p-ből indított játék véget ér. Elképzelhető lenne azonban, hogy tetszőleges k-ra van legalább k lépésből álló lehetséges játékmenet. A bizonyítás a véges matematikából ismert König-lemma gondolatmenete.*

Bizonyítás. A végesség mellett a végesfokúságot használjuk ki. Tegyük fel indirekten, hogy $p_0 := p$-ből indulva nem korlátos a lehetséges játékok hossza. A végesfokúság miatt az i. játékos csak véges sok



1. ábra

lépés közül választhat; ezek közt kell tehát legyen egy olyan p_1, ahonnan még tetszőleges hosszú játék lehetséges. p_1-ből ugyanezzel az érveléssel találunk egy olyan p_2-t, ahonnan még tetszőleges hosszú játék lehetséges. Így folytatva egy $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ végtelen játékmenetet kapunk, ellentmondásban a végességgel. (A különböző p_i-k akár egybe is eshetnek, pl. lehet, hogy egy körön megyünk körbe-körbe.) $\diamond$

$N(p)$-t válasszuk a legkisebb értéknek, amely teljesíti a lemma feltételét. Ez tehát a p-ből indulva játszható leghosszabb játék hossza. Világos, hogy minden $pq \in L$ élre $N(q) \leq N(p) - 1$. Ha p végállás, az épp azt jelenti, hogy a kifoka nulla, vagyis $N(p) = 0$.

Lássuk be a tételt először éles játékokra! Célunk az, hogy P-t K és E halmazok uniójára bontsuk úgy, hogy pontosan a K-beli állásokból nyerhessen mindig a soron következő játékos. A kívánt tulajdonság ehhez az, hogy K-beli pozícióból menjen él E-belibe, E-beliből viszont csak K-belibe lehessen lépni. Ekkor egy K-beli pozícióban az első játékosank nyerő stratégiája az, hogy K-beliből mindig valamely E-belibe lépünk, E-beliből pedig bárhova; és egy ugyanilyen stratégia egy K-beli pozícióból indulva a második játékosnak nyerő stratégia.

A beosztást $N(p)$ szerinti indukcióval végezzük. A végállapotokat, vagyis amikre $N(p) = 0$, helyezzük E-be. Tegyük fel, hogy minden olyan q-t, amire $N(q) < N(p)$, már besoroltunk E-be vagy K-ba; például minden olyan q-t is, melyre $pq \in L$. Ha létezik legalább egy $pq \in L$ lehetséges lépés, amelyre $q \in E$, akkor helyezzük p-t K-ba. Ha minden $pq \in L$ élre $q \in K$, akkor helyezzük p-t E-be. Ezáltal a teljes P-t két halmazra osztottuk. A bizonyítást a 1. ábra szemlélteti a 2×3-as mérgezett csoki játékra. (A játék online játszható itt: `www.math.ucla.edu/~tom/Games/chomp.html`.)

Nem éles játékok esetén a pozíciókat három osztályba osztjuk: K, E és $\hat{D}$. $\hat{D}$ azon állásokat tartalmazza, ahonnan indulva mindketten garantálni tudják a legalább döntetlen kimenetelt (de nem tudja garantálni a győzelmet). Ismét $N(p)$ szerinti indukcióval osztjuk be a pozíciókat. A nyelők közül a D-belieket helyezzük $\hat{D}$-be, a többit pedig E-be.

Az éles esettel megegyezően, ha létezik legalább egy $pq \in L$ lehetséges lépés, amelyre $q \in E$, akkor helyezzük p-t K-ba. Ha nincs ilyen q, de létezik legalább egy olyan, amelyre $q \in \hat{D}$, akkor helyezzük q-t $\hat{D}$-be. Végül ha egyik eset sem teljesül, vagyis minden $pq \in L$ élre $q \in K$, akkor helyezzük p-t E-be.

Ezáltal $\hat{D}$-beli pozícióból indulva mindenképp $\hat{D}$-beli pozícióba érdemes lépni, különben átadjuk a másik játékosnak a nyerési lehetőséget. $\square$

Éles játékra a bizonyításban szereplő E halmazt a játék **magjának** nevezzük (vagyis azt az egyértelmű $E \subseteq P$ halmazt, amire E-beliből csak $P \setminus E$-belibe lehet lépni, de $P \setminus E$-beliből lehet E-belibe lépni). Egy állás **típusának** nevezzük E és K közül azt, amelyikben benne van.

1.7. megjegyzés. *Ha P véges, akkor a fenti bizonyítás egyszerűbben elmondható. A játék végessége miatt a (P, L) gráf aciklikus, vehetjük tehát egy fordított topologikus sorrendjét, vagyis a pozíciók egy* *olyan $p_1, \ldots, p_n$ sorrendjét, ahol $p_i p_j \in L$ esetén $j < i$. Ebben a sorrendben soroljuk a csúcsokat K-ba illetve E-be.*

1.8. feladat. *Hogyan lehetne a fenti tétel gondolatmenetét olyan játékokra általánosítani, amiben a győzelem és vereség helyett tetszőleges valós számot megengedünk kimenetelnek, csak azt követelve meg, hogy a játék nulla-összegű legyen (tehát minden nyelő pontnál meg van adva, hogy az odalépő játékos mennyit fizet a másiknak)?*

1.9. feladat. *Tekintsük a következő játékot. Adott egy véges $S = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}$ pozitív egészekből álló halmaz, és egy n szám. Van egy n kavicsból álló kupac, a két játékos ebből felváltva elvesz $s_i \in S$ darabot, tetszőleges i-re.*

a) $S = \{2, 4, 7\}$ esetén határozd meg, hogy mely n számnak mi a típusa (tehát, hogy E-állás vagy K-állás-e)!

b) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges véges S-re az E típusú állások halmaza egy idő után periodikus!

A 1.4. tétel konstruktív módszert ad a nyerő (vagy nem vesztő) stratégiák meghatározására. A hátránya az, hogy a lehetséges állások száma roppant nagy lehet: már egy kisméretű táblán játszott amőbában is csillagászati. Érdekes módon bizonyos játékokban annak ellenére meg tudjuk mondani, melyik játékosnak van nyerő vagy nem vesztő stratégiája, hogy a stratégiát magát nem tudjuk meghatározni.

1.10. tétel. *Tetszőleges $n \times m$-es mérgezett csoki játékban a kezdőnek van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás. A 1.4. tétel alapján vagy az első, vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája. Tegyük fel indirekten, hogy a második tud nyerni. Ekkor a teljes tábla E-beli, és a második játékos az első tetszőleges lépésére tud E-beli pozícióba lépni. Legyen az első játékos első lépése a jobb felső kocka leharapása! Erre reakcióként a második egy E-beli pozícióba tud lépni. Az első azonban egyből léphette volna ugyanezt, vagyis a teljes tábla nem lehetett E-beli, hiszen lehet belőle E-beli pozícióba lépni. □

A fenti tétel tükrében meglepő, hogy az $n \times n$ és $2 \times n$ méreteken kívül semmi más általános osztályra nem ismert az első játékos nyerő stratégiája. A fenti bizonyítási módszert **stratégialopásnak** nevezzük. Ennek egy másik érdekes alkalmazása az amőba. Tegyük fel, hogy egy véges méretű táblán játszunk, és az nyer, aki k jelet ki tud gyűjteni egyenesen vagy átlóban. (A végtelen táblán játszott amőba nem elégíti ki a kombinatorikai játék definícióját, hiszen egy játszma örökké is tarthat akár.)

1.11. tétel. *A véges táblán játszott amőbában a kezdőnek mindig van nem vesztő stratégiája.*

Bizonyítás. Ismét a 1.4. tétel alapján tegyük fel indirekten, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája! Helyezzen el az első játékos tetszőleges m_0 mezőn egy X-et. Tegyen úgy, mintha ez nem lenne ott, és most kezdődne a játék! Játsszon úgy, ahogy a második játékos játszaná a nem vesztő stratégiáját! (Ezt megteheti: a stratégia minden táblaálláshoz hozzárendel egy lépést.) Az m_0 mezővel csupán akkor lehet probléma, ha a stratégia szerint neki éppen ide kellene lépnie. Ilyenkor válasszon tetszőleges még szabad m_1 mezőt, és lépjen ebbe. Most m_1 veszi át a „láthatatlan X" szerepét, és úgy játszik tovább az első játékos, mintha m_0-ra lépett volna, a stratégiájának megfelelően. Szükség esetén m_1-et további $m_2, m_3, \ldots$ mezőkkel helyettesíti, amíg nem nyer vagy be nem telik a tábla, mely esetben a játék döntetlennel végződik. □

A fenti bizonyítás az alábbi általános játékokra is működik. A **hipergrafikus játékokban** adott egy véges M alaphalmaz, és M részhalmazainak egy $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_t\}$ halmaza. A két játékos felváltva megjelöli M egy-egy elemét; az a játékos nyer, akinek először sikerül a saját jelével egy $\mathcal{H}$-beli halmaz minden elemét megjelölnie. Ha ez nem következik be addig, amíg M elemei elfogynak, akkor a játék döntetlennel ér véget. A fenti tételhez hasonlóan belátható, hogy egy hipergrafikus játékban a kezdőnek mindig van nem vesztő stratégiája.

1.1. k-nim és a Sprague-Grundy elmélet

A **k-nim** játékban adott k kupac kavics, ezek méretei $n_1, \ldots, n_k$. A soron következő játékos pontosan az egyik kupacból vehet kavicsot, onnan viszont bármennyit, de legalább egyet. Az veszt, aki nem tud lépni.

1.12. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha a k-nimben hozzáveszünk a meglevő kupacokhoz két további, egyforma méretű kupacot, akkor a játék lényegében nem változik: ugyanannak a játékosnak lesz nyerő stratégiája.*

A **pénzforgató** játékban adott n pénzérme, mindegyik fejjel vagy írással felfele. A két játékos közül a soron következő átfordíthat egy fejet írásra, és ezen kívül még egy ettől balra levő érmét átfordíthat az ellenkezőjére (akár fejről írásra, akár írásról fejre). Az veszt, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfele).

1.13. feladat. *A fenti feladat segítségével bizonyítsuk be, hogy a pénzforgató játék valójában ekvivalens a k-nimmel: ha (balról) az i. érme fej, az egy i méretű kupacnak felel meg.*

Az a és b számok **nim-összegét** $a \oplus b$-vel jelöljük, és a következő módon kaphatjuk meg. Mindkét számot felírjuk kettes számrendszerben, és az azonos helyiértéken szereplő számokat modulo 2 összeadjuk (átvitel nélkül!). Például $19 \oplus 38 = 53$, ugyanis

$$\begin{array}{r} 10011 \\ \oplus\ 100110 \\ \hline 110101 \end{array}$$

Világos, hogy a nim-összeadás kommutatív és asszociatív művelet. A művelet két további egyszerű tulajdonsága:

$$a \oplus b = c \text{ –ből következik } b \oplus c = a \text{ és } a \oplus c = b; \tag{1}$$

$$\text{az } a \oplus x = 0 \text{ egyenlet egyetlen megoldása } x = a. \tag{2}$$

1.14. tétel (Bouton, 1901). *Az $n_1, n_2, \ldots, n_k$ méretű kupacokkal játszott k-nimben a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k = 0$.*

Bizonyítás. E-belinek definiálunk egy állást, ha a kupacok méreteinek nim-összege 0, egyébként pedig K-belinek. Azt kell belátni, hogy E-beli állásból csak K-belibe lehet lépni, viszont minden K-beli állásból lehet E-belibe lépni. Tegyük fel, hogy egy E-beli állásban vagyunk, és a j. kupacból veszünk. Ekkor n_j egyenlő a többi $k-1$ kupacban levő számok nim-összegével; (2) miatt akárhogyan módosítjuk is n_j-t, a kapott állásban nem lesz 0 a nim-összeg.

Tegyük most fel, hogy egy K-beli állásban vagyunk! Vegyük a legnagyobb olyan helyiértéket, ahol az összeg kettes számrendszerbeli felírásában egyes szerepel! Legyen ez a t. helyiérték. Páratlan sok olyan kupacméret kell legyen, ahol a t. helyen 1-es szerepel; legyen n_j az egyik közülük. Legyen a az n_j-től különböző kupacméretek nim-összege. Vegyük észre, hogy $a < n_j$, ugyanis a t. és minden magasabb helyiértéken is 0 szerepel. Vegyünk el $n_j - a$ követ a j. kupacból! Ekkor $a \oplus a = 0$ értékű, vagyis E-beli állásba jutunk. □

Mi a helyzet, a k-nim betli változatával, tehát ha az veszt, aki az utolsó kavicsot veszi el? Egy kupac esetén az első játékos tud nyerni, feltéve, hogy legalább két kavics van; egy kavics esetén pedig a második játékos. Ha minden kupacban pontosan egy kavics van, akkor páros sok kupac esetén az első, páratlan sok esetén a második játékos nyer automatikusan, akárhogyan is játszanak - akárcsak a normál esetben.

Belátjuk, hogy minden más esetben ugyanazok a nyerőállások, mint a normál k-nimben. Először is, ha egy kupacban egynél több kavics van, a többiben pontosan egy, akkor könnyen látható, hogy az első játékos mindig tud nyerni - összhangban azzal, hogy ilyenkor a nim-összeg nemnulla. Hívjuk az ilyen szituációt L-állásnak.

Tegyük fel, hogy a kupacméretek nim-összege nem nulla (és legalább két kupacban van még kavics). Egész addig, amíg legalább két kupacban van egynél több kavics, játsszon az első játékos úgy, ahogy a normál nimben, vagyis mindig lépjen úgy, hogy a kupacok nim-összegét 0-vá teszi. Vegyük észre, hogy az első játékos sosem léphet L-állásba, hiszen azokra a nim-összeg nemnulla. Előbb-utóbb bekövetkezik egy L-állás, amibe tehát a második játékos kerül. Innentől az első már nyerni tud. Ugyanígy látható, hogy ha a kezdeti nim-összeg nulla, akkor a második játékos tud nyerni.

A k-nimre tekinthetünk úgy, mintha 1-nimet játszanánk k párhuzamos példányban és mindig pontosan az egyikben szabad lépni. Most ezt általánosítva definiáljuk játékok összegét, és meghatározzuk az egyes játékokról ismert információk alapján az összeg nyerő pozícióit. A (P, L) és (P', L') játékok **összegén** a $P \times P'$ alaphalmazon játszott játékot értünk. (p, p')-ből pontosan akkor lehet (q, q')-be lépni, ha $pq \in L$ és $p' = q'$ vagy $p'q' \in L$ és $p = q$. Ha p_0 és p'_0 kezdőpozíciók is meg vannak adva, akkor az összeg játékban is adott egy kezdőpozíció: (p_0, p'_0)-t. Például a k-nim az 1-nimből ismételt összeadással kapható.

1.15. állítás. *Ha a $J = (P, L, p_0)$ játék E típusú, akkor a $J + J'$ összeg-játék tetszőleges J' játékra ugyanolyan típusú, mint J'.*

Bizonyítás. Annak a játékosnak, akinek J'-ben nyerő stratégiája van, a következő lesz a nyerő stratégiája $J + J'$-ben: lépjen J'-ben a stratégiája szerint, kivéve, ha a másik J-ben lép, ekkor a J-beli nyerő stratégiája szerint lépjen (hiszen J-ben a másodiknak van nyerő stratégiája). □

1.16. állítás. *Tetszőleges J és J' játékokra J és $J + J' + J'$ típusa megegyezik.*

Bizonyítás. A J-ben nyerő játékos játszon a J-beli nyerő stratégiája szerint, kivéve, ha a másik a J' egyik példányában lép, ekkor lépje ugyanezt a másik példányban. □

1.17. következmény. *Ha $J + J'$ E típusú, akkor minden J'' játékra $J + J''$ és $J' + J''$ típusa ugyanaz.*

Azt mondjuk, hogy a J és J' játék **ekvivalens**, ha $J + J'$ E típusú.

Az eredeti két játék nyerő pozícióinak ismeretében megadhatóak-e az összegjáték nyerő pozíciói? Első közelítésben nem: az 1-nimben minden $k > 0$ pozíció K-beli, a 2-nimben viszont (k, ℓ) akkor E-beli, ha $k = \ell$, egyébként K-beli. Az E és K osztályokra bontás helyett a pozíciók finomabb kategorizálására lesz szükség, ezt adjuk meg a következő definícióban.

1.18. definíció. *Adott (P, L) kombinatorikus játékra a $g : P \to \mathbb{N}$ függvényt* **Grundy-számozásnak** *hívjuk, ha minden $p \in P$-re*

$$g(p) = \min\{n \geq 0 : n \neq g(q) : pq \in L\}.$$

Ezt a definíciót így fogjuk rövidíteni:

$$g(p) = \operatorname{mex}\{g(q) : pq \in L\},$$

(ahol a mex *a minimal excludant rövidítése és a legkisebb nemnegatív egészet jelöli, ami nincs benne a halmazban). Egy (P, L, p_0) kombinatorikus játék* **Grundy-száma** *a $g(p_0)$ szám.*

Vegyük észre, hogy minden p végállapotra $g(p) = 0$ teljesül. Ha adott a g számozás, akkor kézenfekvően adódik, hogy $E = \{p : g(p) = 0\}$ és $K = \{p : g(p) > 0\}$, ugyanis éppen azokra az értékekre lesz $g(p)$ pozitív, amelyekre létezik olyan $pq \in L$, hogy $g(q) = 0$.

1.19. tétel. *Minden éles kombinatorikus játéknak létezik (és egyértelmű) a Grundy-számozása.*

A bizonyítás lényegében azonos a 1.4. tétel bizonyításával. Annyit kell csupán változtatni, hogy a soron következő p-t nem E-be vagy K-ba soroljuk be, hanem $g(p)$-t definiáljuk.

Példaként tekintsük a **Wythoff-nimet**: ezt két kupaccal játszák, és a soron következő játékos vagy az egyikből vehet el akármennyit, vagy pedig mindkettőből ugyanannyit. Ezért - a 2-nimmel ellentétben - az (n, n) állás nem lesz automatikusan E-beli. A táblázat két koordinátatengelye a két kupac méretét jeleníti meg. A $p = (i, j)$ pozícióra $N(p) = i + j$, az értékeket erre vett indukcióval számolhatjuk.

5	5	3	4	0	6	8
4	4	5	3	2	7	6
3	3	4	5	6	2	0
2	2	0	1	5	3	4
1	1	2	0	4	5	3
0	0	1	2	3	4	5
	0	1	2	3	4	5

A Grundy számozás legfontosabb tulajdonsága, hogy két játék számozásának ismeretében meg tudjuk adni az összeg számozását:

1.20. tétel (Sprague, Grundy). *Legyen $g : P \to \mathbb{N}$ illetve $g' : P' \to \mathbb{N}$ a (P, L) illetve (P', L') játékok Grundy-számozása. Ekkor a játékok összegének Grundy-számozása $g(x) \oplus g'(x') : P \times P' \to \mathbb{N}$.*

Bizonyítás. Legyen $f(x, x') = g(x) \oplus g'(x')$. Legyen $(x, x') \in P \times P'$ az összegjáték egy pozíciója, $f(x, x') = a$. Azt kell belátnunk, hogy (i) minden $0 \leq b < a$-ra létezik olyan (x, x')-ből éllel elérhető (y, y'), amelyre $f(y, y') = b$; (ii) nincs olyan (x, x')-ből éllel elérhető (y, y') pozíció, amelyre $f(y, y') = a$.

(i)-hez legyen $c = a \oplus b$, és legyen t a legnagyobb helyiérték, ahol c-ben egyes szerepel. Mivel $b < a$, ezért a t. pozícióban b-ben 0, a-ban pedig 1 szerepel. Mivel $a = g(x) \oplus g'(x')$, ezért $g(x)$ és $g(x')$ közül az egyikben a t. helyen 0 van, a másikban pedig 1. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $g(x)$-ben szerepel 1. Ekkor $c \oplus g(x) < g(x)$. Mivel g az első játék Grundy-számozása volt, ezért van olyan $xy \in L$ él, hogy $g(y) = c \oplus g(x)$.

A játékok összegének definíciója alapján (y, x') elérhető (x, x')-ből. Ekkor

$$f(y, x') = g(y) \oplus g(x') = (c \oplus g(x)) \oplus g(x') = c \oplus (g(x) \oplus g(x')) = c \oplus a = b.$$

Itt az asszociativitást illetve (1)-et használtuk.

(ii) belátásához tegyük fel, hogy egy (y, y') éllel elérhető pozícióra $f(y, y') = a$. Az összeg definíciója miatt vagy $x = y$ vagy $x' = y'$; a szimmetria miatt tételezzük fel az utóbbit. Ekkor $a = g(x) \oplus g(x') = g(y) \oplus g(x')$. (1) felhasználásával $g(x) = a \oplus g(x')$ illetve $g(y) = a \oplus g(x')$, tehát $g(x) = g(y)$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $xy \in L$. $\square$

1.21. következmény. *A $J = (P, L, p_0)$ és $J' = (P', L', p'_0)$ játékok pontosan akkor ekvivalensek, ha $g_J(p_0) = g_{J'}(p'_0)$.*

1.22. következmény. *Minden J kombinatorikus játékhoz létezik egy egyértelmű g szám, hogy J ekvivalens a g-nimmel, méghozzá a játék Grundy-száma.*

Első példaként tekintsük a következő játékot! Három kupac kavics közül a soron következő játékosnak vagy az elsőből legfeljebb 3, vagy a másodikból legfeljebb 5, vagy a harmadikból legfeljebb 6 kavicsot kell elvennie (de legalább egyet mindenképpen). Kinek van nyerő stratégiája, ha a három kupac elemszáma eredetileg 19, 24, 15? Ha egy kupaccal játszunk és 1 és m közötti számú kavicsot vehetünk el, akkor könnyen látható, hogy az n kavicsú állás Grundy-száma éppen az n szám $m+1$-gyel való osztási maradéka. Vagyis a három játék Grundy-száma $g_1(19) = 3$, $g_2(24) = 0$, $g_3(15) = 1$. Az összeg értéke ennek megfelelően $g(19{,}24{,}13) = 3 \oplus 0 \oplus 1 = 2$, vagyis a kezdőnek van nyerő stratégiája.

1.23. feladat. *Mi kell legyen a kezdő első lépése?*

További példáink a tétel olyan alkalmazásait illusztrálják, amelyekben elsőre nem nyilvánvaló, hogy több játék összegéről van szó.

1.1.1. Kugli

A **kugliban** egy sorban kezdetben n kuglibábu van felállítva, melyeket a játék folyamán felborítunk. A soron következő játékos felboríthat egy vagy két szomszédos, még álló kuglit (de legalább egyet mindenképp fel kell borítania). Az nyer, aki az utolsó kuglit felborítja.

A játék szempontjából az egymás melletti, még álló bábuhalmazok mérete számít. Vegyük észre, hogy a játék ekvivalens a következő „kupacos játékkal”. Adott néhány kupac; a soron következő játékos az egyik kupac méretét csökkenti eggyel vagy kettővel, és a maradékot esetleg felosztja két tetszőleges méretű kupacra (de akár egyben is hagyhatja). Világos, hogy egy k kupaccal induló játék tekinthető k, egy-egy kupaccal játszott játék összegének. Emiatt a Grundy-számozás meghatározásához elég az egyetlen kupacra vonatkozó játék Grundy-számainak meghatározása. Egy n méretű kupacból indulva az $\{i, j\}$ kupacméretek elérhetőek, ahol $0 \leq i, j,\ n-1 \leq i+j \leq n-2$. Ennek megfelelően

$$g(n) = \text{mex}\{g(n-1), g(n-2), g(1) \oplus g(n-2), g(1) \oplus g(n-3), g(2) \oplus g(n-3), g(2) \oplus g(n-4), \ldots\}.$$

Világos, hogy $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = 3$. A fenti képlet szerint

$$g(4) = \text{mex}\{3{,}2{,}1 \oplus 2{,}1 \oplus 1\} = \text{mex}\{3{,}2{,}3{,}0\} = 1.$$

Ezzel a módszerrel meghatározva $g(n)$ értékeit, kiderül, hogy $n \geq 70$-re a Grundy-számok periodikusak, a periódus hossza 12 (ezt nem bizonyítjuk be). Kiderül, hogy $n = 0$ az egyetlen szám, melyre $g(n) = 0$, vagyis mindig a kezdőnek van nyerő stratégiája. Ez valójában könnyen látszik Grundy-számozás nélkül is.

1.24. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a kugliban mindig a kezdőnek van nyerő stratégiája! Mi ez a stratégia?*

1.1.2. Az általános pénzforgató játék

A korábban ismertetett pénzforgató játéknak tekintsük a következő általánosítását! Adott n pénzérme, mindegyik fejjel vagy írással felfelé. A soron következő játékosnak ki kell választania egy fejet, és azt írásra átfordítani. Ezen kívül az ettől balra levő érméknek egy, a szabályok által megengedett részhalmazát kell átfordítania. Az eredeti változatban ez az üres halmaz vagy tetszőleges egyelemű halmaz lehetett. Általában azt írjuk elő, hogy ez a részhalmaz csak a kiválasztott (jobbszélső) fej pozíciójától függhet, az érmék helyzetétől vagy a játék korábbi lépéseitől azonban nem. Formálisan, minden $1 \leq i \leq n$-re adott az $\{1, \ldots, i-1\}$ halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{S}_i$ halmaza. Egy lépésben ki kell választani egy i pozíciót, ahol fej szerepel, azt átfordítani, valamint kiválasztani egy $\mathcal{S}_i$-beli halmazt, és annak összes elemét is átfordítani.

Online pénzforgató játékokat itt találhatunk: `www.chlond.demon.co.uk/Coins.html`.

Először is lássuk be, hogy ez egy véges játék. Egy pozíciót elkódolhatunk azzal a kettes számrendszerben felírt számmal, aminek a 2^i-hez tartozó helyiértéke 0, ha az $i+1$. pénzérme írás és 1, ha fej. Ez a szám minden lépésben csökkenni fog, hiszen egy egyest 0-ra változtatunk, és utána csak a kisebb helyiértékeken változtatunk.

A nim legelső változatát, amikor 1,2 vagy 3 kavicsot vehettünk el, például úgy mondhatjuk ezen a nyelven, hogy $i \geq 4$ esetén $\mathcal{S}_i = \{\{i-1\}, \{i-2\}, \{i-3\}\}$, $\mathcal{S}_1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{S}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.

Az eredeti pénzforgató játék egy k-nimnek felelt meg. Az általános játék is egy általános kavicsos játéknak feleltethető meg. Adott néhány kupac kavics. A soron következő játékos kiválaszt egy i méretű kupacot, abból elvesz legalább egy kavicsot, a maradékot pedig kisebb kupacokra bontja. A szabály az, hogy minden új kupac mérete az $\mathcal{S}_i$ egyik eleme kell, hogy legyen. A lényegi észrevétel ismét az, hogy a játékosok nyerő stratégiáin nem változtat, ha két ugyanakkora kupacot hozzáveszünk a játékhoz (vagy pedig elveszünk).

Emiatt a megjegyzés miatt elég az olyan játékokra koncentrálnunk, ahol csak egyetlen fej van (vagyis amik egy kupacnak felelnek meg). Ugyanis egy tetszőleges érmesorozattal játszott játék ekvivalens k ilyen összegével, ahol k a fejek száma. Így például az $IFFIIFIF$ sorozat Grundy-száma az IF, IIF, $IIIIIIF$ és $IIIIIIIF$ játékok Grundy-számainak nim-összege lesz. k-állásnak hívjuk azt, amikor a k. helyen áll fej, a többin írás.

Tekintsük most azt a játékot, amikor a jobbszélső fejen kívül még legfeljebb két másikat fordíthatunk át, vagyis $\mathcal{S}_i = \{A : A \subseteq \{1, \dots, i-1\}, |A| \leq 2\}$. (A kavicsok nyelvén: kiválasztunk egy kupacot, elveszünk belőle legalább egyet, a maradékot pedig legfeljebb két részre osztjuk.)

Praktikusabb lesz ezúttal az érmék számozását 1 helyett 0-val kezdeni. Jelölje $g(k)$ a k-állás Grundy-számát. Világos, hogy $g(0) = 1$, hiszen egy fejből csak a csupa írás állapot (a végállapot) érhető el. Hasonlóan, $g(1) = 2$. A 2-állásból, vagyis IIF-ből elérhető III, FII, IFI illetve FFI. Ez utóbbi Grundy-száma $g(FFI) = g(FF) = g(F) \oplus g(IF) = g(0) \oplus g(1) = 3$, vagyis $g(2) = g(IIF) = 4$. Általában,

$$g(k) = \text{mex}\{0, g(1), \dots, g(k-1)\} \cup \{g(i) \oplus g(j) : 0 \leq i < j \leq k-1\}.$$

Ez alapján kiszámolhatóak a következő értékek.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$g(k)$	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19	21	...

Láthatóan $g(k)$ mindig vagy $2k$ vagy $2k+1$ lesz. Belátjuk, hogy ez azon múlik, hogy k kettes számrendszerbeli felírásában az egyesek száma páros vagy páratlan. Ha páros sok egyes van, akkor számot **kegyesnek**, ha páratlan, akkor **kegyetlennek** nevezzük.

1.25. tétel. *Ha k kegyetlen, akkor $g(k) = 2k$, ha pedig kegyes, akkor $g(k) = 2k+1$.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrízhetőek az alábbi összefüggések:

$$\text{kegyes} \oplus \text{kegyes} = \text{kegyetlen} \oplus \text{kegyetlen} = \text{kegyes}$$
$$\text{kegyes} \oplus \text{kegyetlen} = \text{kegyetlen} \oplus \text{kegyes} = \text{kegyetlen}$$

Indukcióval bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy k-nál kisebb értékekre már beláttuk. Mivel megtehetjük, hogy a k. pozícióban levő érmén kívül senkit sem fordítunk át, ezért minden állásból elérhető a csupa írás állapot, melynek Grundy-száma 0. Egy további érme átfordításával elérhetünk minden olyan állapotot, amelyben az i. helyen áll csak fej $(0 \leq i \leq k-1)$.

Vegyük észre, hogy a $\{g(i) : 0 \leq i \leq k-1\}$ halmaz éppen a $2k$-nál kisebb kegyetlen számok halmaza lesz. Valóban, egyrészt indukció miatt $g(i)$ kegyetlen $1 \leq i \leq k-1$-re. Másrészt ha $2t < 2k$ egy páros kegyetlen szám, akkor $g(t) = 2t$, hiszen t is kegyetlen; ha pedig $2t+1 < 2k$ kegyetlen, akkor $g(t) = 2t+1$, hiszen t kegyes.

Azt állítjuk, hogy a $\{g(i) \oplus g(j) : 0 \leq i < j \leq k-1\}$ halmaz éppen a 0 és $2k$ közötti kegyes számok halmaza. Valóban, megállapítottuk hogy két kegyetlen szám nim-összege kegyes, tehát a halmazban szereplő minden szám kegyes. Könnyen látható továbbá, hogy tetszőleges kegyes szám felbontható két nála kisebb kegyetlen szám nim-összegére: tetszőleges a kegyes számra ha $2^t < a$, akkor 2^t és $a - 2^t$ kegyetlen számok.

Összegezve: a k-állásból elérhető pozíciók Grundy-számai pontosan a $\{0,1\dots,2k-1\}$ halmaz elemei, továbbá a $2k$, amennyiben kegyes. Ebből következik az állítás. $\square$

A következő pénzforgató játék a vonalzó nevet viseli. Itt a jobbszélső átforgatott érmétől balra bármennyit átforgathatunk, azonban csak úgy, hogy az összes átforgatott érme folytonosan helyezkedik el, azaz $\mathcal{S}_i = \{\emptyset, \{j, j+1, \dots, i-1\} : 1 \leq j \leq i-1\}$. Maradjunk most a pozíciók eredeti, 1-gyel kezdődő számozásánál; jelölje $g(k)$ a k-állás Grundy-számát, tehát amikor az első $k-1$ érme írás, a k-adik pedig fej. Könnyen láthatóan

$$g(k) = \text{mex}\{0,\ g(k-1),\ g(k-1) \oplus g(k-2),\ \dots, g(k-1) \oplus g(k-2) \oplus \dots \oplus g(1)\}.$$

Kis k-kra az alábbi értékeket kapjuk:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$g(k)$	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	...

1.26. tétel. *$g(k)$ értéke a legnagyobb olyan 2-hatvány, amely osztja k-t.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk; tegyük fel, hogy k-nál kisebb értékekre beláttuk! Jelöljük $h(k)$-val a k-t osztó legnagyobb 2-hatványt! Szükségünk lesz egy lemmára:

1.27. lemma. *Minden z számhoz létezik egy olyan $f(z)$ érték, amelyre*

$$h(1) \oplus \ldots \oplus h(f(z)) = z.$$

Ha $2^t \leq z \leq 2^{t+1} - 1$, akkor $2^t \leq f(z) \leq 2^{t+1} - 1$.

Bizonyítás. Tekintsük z kettes számrendszerbeli felírását! A legnagyobb helyiértékű (a t. helyen álló) 1-est hagyjuk változatlanul. Innen a kisebb jegyek felé haladva, ha a megváltoztatott állapotban az előző jegy egyes, akkor a soron következő jegyet változtassuk ellenkezőjére; egyébként hagyjuk változatlanul. Legyen $f(z)$ az így kapott szám. Például $f(11) = 13$, ugyanis 11 kettes számrendszerbeli alakja 1011; a második számjegyet 1-esre kell változtassuk, mivel előtte egyes maradt; emiatt a harmadikat is meg kell változtatni. Ennek 0-ra változása miatt azonban az utolsót változatlanul hagyjuk, 1101-hez jutva.

Legyen z_i illetve $f(z)_i$ a z illetve $f(z)$ kettes számrendszerbeli felírásában az i helyiértéken szereplő számjegy. Azt kell belátni, hogy ha $z_i = 1$, akkor $h(1), \ldots, h(f(z))$ között 2^i páratlan sokszor szerepel, egyébként páros sokszor. A legmagasabb helyiértékre ez világos, hiszen a konstrukcióban $2^t \leq f(z) \leq$ $\leq 2^{t+1} - 1$ triviálisan teljesül.

Legyen r az $f(z)$ legkisebb $i + 1$ helyiértékének törlésével keletkező szám. Vegyük észre, hogy $h(1), \ldots, h(r)$ között 2^i páros sokszor szerepel. Tegyük fel, hogy $f(z)_{i+1} = 0$. Ekkor a konstrukció szerint $f(z)_i = z_i$. Ekkor $z_i = 0$ esetén $h(r + 1), \ldots, h(f(z))$ közt 2^i egyszer sem szerepel, ha $z_i = 1$, akkor pedig pontosan egyszer. Ha viszont $f(z)_{i+1} = 1$, akkor $f(z)_i = 1 - z_i$. Valóban, ekkor $h(r +$ $+1), \ldots, h(r+2^{i+1})$ közt 2^i egyszer szerepel. Ezért szükséges az i. számjegyet ellenkezőjére változtatni. $\diamond$

Legyen $k = 2^t(2x + 1)$. Azt akarjuk igazolni, hogy $g(k) = 2^t$. A k-állásból elérhető állások a csupa írás (ennek Grundy-száma 0), illetve azon állások, amikor valamely $a \in \{1,2, \ldots k - 1\}$-re a $k - 1, k - 2, \ldots, k - a$ pozíciókban szerepel fej. Ez utóbbi Grundy száma az indukció miatt $g(k - 1) \oplus$ $\oplus \ldots \oplus g(k - a) = h(k - 1) \oplus \ldots \oplus g(k - a)$.

Ha $i < t$, akkor 2^i pontosan akkor osztja $k - a$-t, amikor a-t. Ha $i \geq t$ és $a < 2^t$, akkor 2^i nem osztója $k - a$-nak. Ezért $1 \leq a \leq 2^t - 1$-re $h(k - a) = h(a)$, ami alapján az indukció miatt

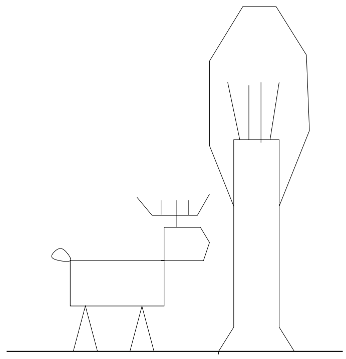
$$\begin{aligned}
&\{g(k-1), g(k-1) \oplus g(k-2), \ldots, g(k-1) \oplus \ldots \oplus g(k-2^t+1)\} = \\
&= \{h(k-1), h(k-1) \oplus h(k-2), \ldots, h(k-1) \oplus \ldots \oplus h(k-2^t+1)\} = \\
&= \{h(1), h(1) \oplus h(2), \ldots, h(1) \oplus \ldots \oplus h(2^t-1)\} = \\
&= \{g(1), g(1) \oplus g(2), \ldots, g(1) \oplus \ldots \oplus g(2^t-1)\}.
\end{aligned}$$

Ez utóbbi halmaz a lemma második fele miatt éppen az $\{1,2, \ldots ,2^t - 1\}$ halmazzal azonos. Az állítás következik, ha belátjuk, hogy $a \geq 2^t$ esetén $g(k - 1) \oplus g(k - 2) \oplus \ldots \oplus g(k - a) \neq 2^t$. $a = 2^t$-re $2^{t+1} \mid k - a$, ezért $2^{t+1} \mid g(k - a)$. Ekkor a nim-összeadandók között $g(k - a)$ az egyértelmű legnagyobb kettő hatvány, így a nim-összegben a legnagyobb helyiértékű egyes legalább a $(t + 1)$-edik helyiértéken szerepel. Könnyű végiggondolni, hogy ha a értékét eggyel növeljük, a legnagyobb helyiérték nem csökkenhet. Ezért minden $a \geq 2^t$ esetén a nim-összeg szigorúan nagyobb lesz 2^t-nél. $\square$

1.28. megjegyzés. *A 1.27. lemmában megadott $f(z)$ számozást Gray-kódnak hívják, és számos további érdekes tulajdonsága van. Például minden z-re $f(z)$ és $f(z+1)$ pontosan egy számjegyben tér el a kettes számrendszerben.*

1.1.3. A sövényvágó játék

A **sövényvágó játékban** adott egy (nem feltétlenül összefüggő) irányítatlan gráf (növények), és a csúcsok egy kijelölt T részhalmaza, melyek között nem megy él. T-re úgy gondolunk, mint a talajon elhelyezkedő csúcsokra. Két kertész a következő játékot játssza: felváltva kitörölnek egy-egy élt a gráfból, és vele együtt minden olyan csúcsot, ahonnan már nem lehet elérni a talajt (azaz T-beli



2. ábra

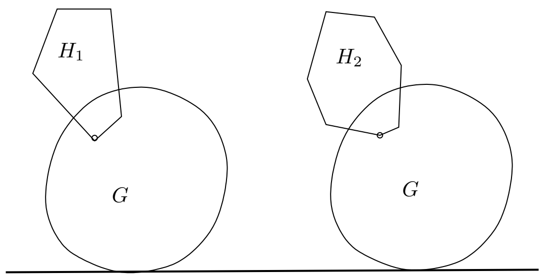
pontot). Az veszt, aki nem tud lépni, vagyis már csak a T-beli csúcsok maradtak, amikor ő kerül sorra. A 2. ábra példájában a vastag vízszintes vonal a talaj, az arra eső pontok tartoznak T-be.

A játék legegyszerűbb változatában egy bambuszligeten játszanak: a gráf k diszjunkt útból áll, T ezek egyik végpontjainak halmaza. Vegyük észre, hogy ekkor a játék azonos a k-nimmel! A következőkben meghatározzuk a Grundy-számozást arra az esetre, amikor a gráf egy erdő (fák diszjunkt uniója), és minden fa pontosan egy T-beli pontot tartalmaz. Egy b csúcs leszármazottainak azokat a csúcsokat nevezzük, akikbe a talajtól b-n keresztül lehet eljutni.

Nevezzük a gráf egy legalább harmadfokú csúcsát **bognak**, ha az ő leszármazottait tartalmazó komponensek mindannyian utak. Ezeket az utakat **hajtásnak** nevezzük.

1.29. állítás. *Ekvivalens játékot kapunk, ha egy bognál eltávolítjuk az összes hajtást, és a hosszaik nim-összegével megegyező hosszúságú hajtással helyettesítjük.*

Bizonyítás. Általánosabban a következőt bizonyítjuk. Legyen G tetszőleges gráf, H_1 és H_2 pedig két olyan gráf, amelyek Grundy-száma azonos, és egyetlen T-beli pontot tartalmaznak. Ezzel a T-beli ponttal ragasszuk rá H_1-et illetve H_2-t G-nek ugyanarra a csúcsára. Ezáltal a G_1 és G_2 gráfokat kapjuk (ld. 3. ábra).

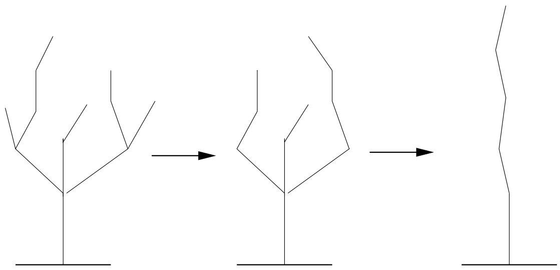


3. ábra

Belátjuk, hogy G_1 és G_2 Grundy-száma ugyanaz. Ez pontosan akkor teljesül, ha a nim-összegük nulla, ami pedig épp azzal ekvivalens, hogy a $G_1 + G_2$ gráfon (a diszjunkt unión) játszott játékban a másodiknak van nyerő stratégiája.

Jelöljük H_1^i-vel és H_2^i-vel a H_1-ből illetve H_2-ből maradt aktuális részt az i-edik lépés után és vegyünk egy páros i-t, vagyis egy olyan állást, amikor az első játékos jön. Ha az első játékos G-beli élt választ az egyik gráfban, akkor a második válassza ugyanazt a másik gráfban! Ha pedig H_1^i vagy H_2^i-beli élt választ, akkor pedig válasszon úgy egy élt H_1^{i+1}-ben vagy H_2^{i+1}-ben, hogy a H_1^{i+2} és H_2^{i+2} Grundy-száma továbbra is megegyezzen. Ez lehetséges, hiszen H_1^{i+1} és H_2^{i+1} Grundy-száma különböző lesz, és a nagyobbik Grundy-számúban el tudunk vágni egy élt úgy, hogy utána ugyanaz legyen a két Grundy-szám. □

Az előbbi állítás segítségével tetszőleges erdőt vele azonos Grundy-számú bambuszligetté alakíthatunk. Ha már nincsen bog, készen vagyunk. Ha van, akkor az egyiken alkalmazzuk az állításban szereplő műveletet; ezáltal a bogok száma csökken. A 4. ábra ezt illusztrálja.

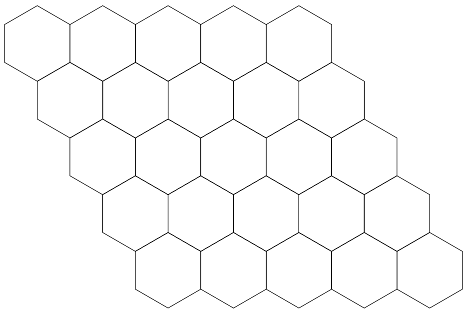


4. ábra

1.30. feladat. *A fenti átalakítási folyamat segítségével dolgozzunk ki eljárást a nyerő stratégia meghatározására!*

1.2. Hex

A **hex** nevű játék egy hatszögrácson folyik, aminek n sora és n oszlopa van (lásd az 5. ábrát). A két játékos, A és B a rács mezőit foglalja el felválta, úgy, hogy A fehér, B pedig fekete korongot tesz rá (A kezd; és egy mezőt csak egyszer lehet elfoglalni). A akkor nyer, ha keletkezik egy fehér „gyöngysor" (út) a tábla felső szélétől az alsóig, B pedig akkor, ha keletkezik egy fekete út a tábla bal szélétől a jobbig.



5. ábra

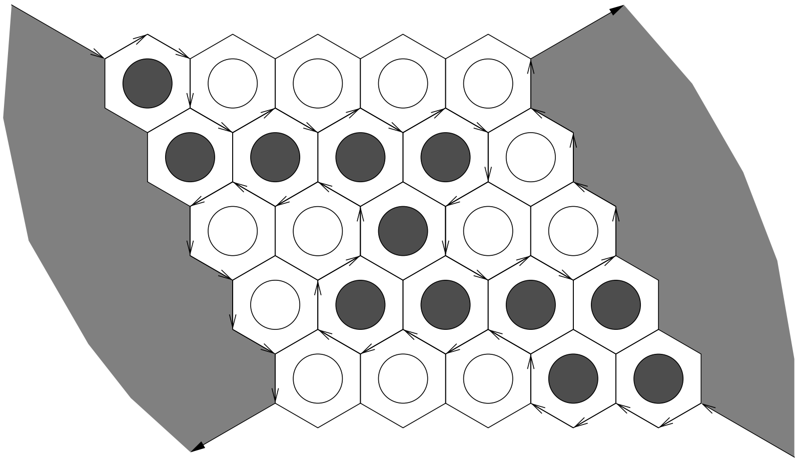
1.31. feladat. *Ha hasonló játékot játszanának, csak $n \times n$-es négyzetrácson, akkor mindkettejüknek lenne nemvesztő stratégiája.*

1.32. tétel. *A hex minden n-re éles játék, vagyis nem lehet döntetlen.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy minden mezőn van korong. Egészítsük ki a táblázatot négy végtelenbe menő éllel az ábra szerint, és színezzük a felső és alsó végtelen tartományokat fehérre, a jobb és bal oldalit pedig feketére. Vegyük a hatszögrács élei és a négy új él közül azokat, amiknek a két oldalán különböző szín van, és irányítsuk meg ezeket úgy, hogy arrafele nézve a baloldal legyen fehér, mint a 6. ábrán.

Ekkor minden pontra vagy nem illeszkedik irányított él (ha a pont körüli mezők egyforma színűek), vagy pont él egy indul ki belőle és egy érkezik be. Tehát ha a bal felső élen elindulunk, akkor végig tudunk követni egy egyértelmű irányított utat, és végül valamelyik kimenő végtelen élen kell távoznunk. Látható, hogy ha a jobb felső élbe érkezünk, akkor B nyert, ha pedig a bal alsóba, akkor A nyert. $\square$

1.33. megjegyzés. *Ez a tétel, a Sperner-lemmához (2.21. illetve 2.22. lemma) hasonlóan szorosan kapcsolódik a Brouwer fixpont-tételhez (2.19).*



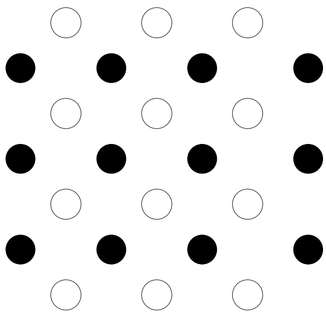
6. ábra

1.34. állítás. *A hexben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás. Stratégialopással be lehet bizonyítani, az amőbához hasonlóan (1.11. tétel), hiszen itt is szimmetrikus a két játékos szerepe. □

1.35. feladat*. *Mutasd meg, hogy ha n sor és $n-1$ oszlop van, akkor B-nek van nyerő stratégiája!*

A következő játékban a játékosok a 7. ábrán látható táblán kötnek össze szomszédos pontokat szakaszokkal úgy, hogy a szakaszok nem metszhetik egymást. A két szomszédos $\circ$ pontot köthet össze vízszintesen vagy függőlegesen, B pedig két szomszédos $\bullet$ pontot. A célja itt is az, hogy legyen út a tábla felső szélétől az alsóig, B pedig jobbról balra szeretne utat építeni.



7. ábra

1.36. feladat. *a) Bizonyítsd be, hogy A-nak van nyerő stratégiája!*

b) Adj nyerő stratégiát A-nak!*

1.37. feladat. *Két játékos egy gráfban választ felváltva egy-egy élt, úgy, hogy a kiválasztott éleknek mindig egy utat kell alkotniuk (de mind a két irányba lehet hosszabbítni az utat). Az veszít, aki már nem tud így élt választani. Milyen gráf esetén kinek van nyerő stratégiája?*

2. Stratégiai játékok

Az eddig látott kombinatorikus játékok alapvető objektuma a pozíciókat és lépéseket leíró (P, L) gráf volt. Feltételeztük, hogy két játékos van, akik felváltva lépnek. Számos közismert játék nem írható le ebben a keretben: kezdjük a **kő-papír-ollóval**, ami leírható a következő táblázattal.

	Kő	Papír	Olló
Kő	0, 0	-1, 1	1, -1
Papír	1, -1	0, 0	-1, 1
Olló	-1, 1	1, -1	0, 0

A győztes egy, a vesztes mínusz egy pontot kap, a döntetlen nulla pontot ér mindkettejüknek. A táblázat sorai az első, oszlopai a második játékos egyes döntési lehetőségeit jelentik; az egyes pozíciókban levő számpárok elemei az első, illetve a második játékos pontszámát adják meg az adott kimenetelnél. Ezt a táblázatos ábrázolási formát a játék **normál formájának**, **nyereségmátrixának** vagy **kifizetési mátrixának** fogjuk nevezni. Ez egy **véges, determinisztikus, kétszemélyes, nulla-összegű, szimmetrikus, teljes információs, egylépéses, szinkron** játék.

Megadunk egy formális modellt, amit a következőkben **véges stratégiai játék** alatt fogunk érteni.

– Véges sok, n játékos van.

– Az i. játékoshoz adott egy véges S_i halmaz, aminek elemeit a játékos **stratégiáinak** nevezzük.

– A játék egy lehetséges **kimenetele** az, hogy minden játékos választ egyszerre egy-egy stratégiát. A kimenetelek halmaza tehát $S := S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. A kimeneteleket más néven **stratégiaválasztásoknak** hívjuk.

– Feltesszük, hogy a játékosok a kimenetelekhez hozzá tudnak rendelni egy valós számot, hogy mennyi a nyereségük ebben a helyzetben. Az i. játékos nyereségét az $u_i : S \to \mathbb{R}$ **nyereségfüggvény** írja le. A veszteség negatív értékű nyereség, a nulla kimenetel pedig semlegesnek számít. Minden játékos célja a saját nyereségének maximalizálása.

– A játék **egylépéses szinkron**: a játékosok egyszerre választják ki egy-egy stratégiájukat, a többiek döntésétől függetlenül.

– A játék **teljes információs**: minden játékos ismeri az összes S_i halmazt és u_i nyereségfüggvényt.

– A játékelmélet fontos feltételezése a játékosok **racionalitása**. Ebbe beleértjük egyrészt, hogy a játékosok tisztában vannak a saját preferenciáikkal illetve célfüggvényükkel; tisztában vannak saját lehetséges döntéseikkel; arra törekszenek, hogy a célfüggvényüket maximalizálják, és az ehhez vezető lehetséges legjobb döntéseket hozzák a rendelkezésre álló információk alapján.
A racionalitáshoz szorosan kapcsolódó, itt éppen csak érintett fogalom a **racionalitás köztudása**: amellett, hogy a játékosok racionálisak, tudják egymásról is, hogy racionálisak, tudják azt, hogy mindenki más tudja hogy a többiek racionálisak, és így tovább a végtelenségig.

Az, hogy képesnek tekintjük a játékosokat racionális döntés meghozatalára, valójában egy nagyon erős és egyáltalán nem természetes feltevés. A köznyelvben a racionális játék szinonimájaként használt sakkra például egyáltalán nem teljesülnek: a játékosok a borzasztó mennyiségű lehetséges döntésüknek valójában csak egy elhanyagolható szeletét tudják (ráadásul erősen korlátozottan) mérlegelni. Az első számítógépek megjelenésétől kezdve fontos törekvés volt, hogy az ember megverésére képes programot írjanak; a győzelem időpontjának 1997-et szokták hirdetni, amikor az IBM *Deep Blue* gépe legyőzte Kasparovot. Ez a győzelem leginkább a technológiának, a hatalmasra növelt számítási kapacitásnak köszönhető. A korlátozott racionalitás azonban éppúgy igaz a számítógépekre is, valójában ők is csak egy apró szeletét látják át a lehetőségeknek.

A játék determinisztikussága alatt azt értjük, hogy a játék szabályai közt semmilyen véletlen tényező nem szerepel (ellentétben a kártyajátékokkal); azt viszont meg fogjuk engedni, hogy az egyes játékosok a saját döntésük meghozatalához a véletlent (pl. pénzfeldobás) hívják segítségül.

Egy stratégiai játék **nulla-összegű**, ha a játékosok össznyeresége minden kimenetelnél nulla, tehát egymás kárára tudnak nyerni. Egy kétszemélyes játék **szimmetrikus**, ha a két játékos stratégiáinak a halmaza közt van egy bijekció úgy, hogy felcserélve őket a másik játékos nyereségeit kapjuk.

Véges stratégiai játék mellett végtelennel is fogunk találkozni, amikor a játékosok száma vagy a stratégiahlamazok mérete végtelen.

Megjegyezzük, hogy a kombinatorikus játékok is felírhatók véges stratégiai játékként. Stratégia alatt ott egy olyan függvényt értettünk, amely minden lehetséges pozícióhoz hozzárendel egy lépést. Ha a két játékos a játék kezdete előtt kiválasztja a stratégiáját, onnantól a játék kimenetele tökéletesen determinálva van. Képzelhetjük úgy, hogy a teljesen dokumentált stratégiát a játékosok átadják egy játékvezetőnek, aki utána lépésről lépésre le tudja játszani a játékosok szándékainak megfelelően a játékot és eredményt hirdethet. (A sakk esetén egy ilyen dokumentáció mérete messze meghaladná a világegyetem méretét.) Ugyan a kombinatorikus játékok többlépéses szekvenciális játékok, mégis, a fenti értelemben tekinthetőek egylépéses szinkron játéknak is, ahol az egyetlen döntés a stratégia megválasztása.

A stratégiai játékok elmélete például azt vizsgálja, hogy hogyan választanak a játékosok, ha ésszerűen viselkednek. illetve van-e algoritmikus módszer „jó” stratégia kiválasztására, és egyáltalán, milyen egy jó stratégia?

2.1. Fogolydilemma

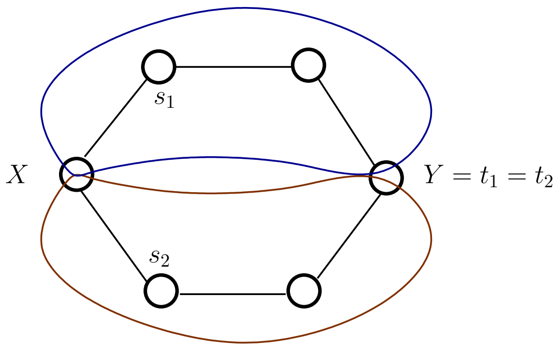
A talán legismertebb játékelméleti problémában a rendőrség letartóztat két bűnözőt, akiket egy súlyos bűntény elkövetésével gyanúsítanak. Tárgyi bizonyíték azonban nincs, beismerő vallomásra lenne szükség. A gyanúsítottakat éjszakára külön cellákba zárják, hogy ne tudjanak összebeszélni. Reggelre kell eldönteniük, hogy vallomást tesznek-e. Ha mindketten tagadnak, akkor gyorshajtásért és visszaeső közterületi alkoholfogyasztásért két évre ítélik őket. Ha mindketten vallomást tesznek, mindketten négy évet kapnak. Ha viszont az egyikük tesz vallomást, a másik tagad, akkor aki tagad, az öt évet kap, hiszen eredeti bűnén felül még hamisan is vallott. A másik is kap azért egy évet, csak a miheztartás végett. A játék nyereségmátrixa tehát az alábbi:

	Vall	Tagad
Vall	-4,-4	-1,-5
Tagad	-5,-1	-2,-2

Érdemes-e valamelyik rabnak tagadnia? Ha a másik vallomást tesz, akkor ő is jobban járna a vallomással: öt helyett csupán négy évet kapna. Szintén jobban járna a vallomással, ha a másik tagad: ekkor kettő helyett csak egy év börtönre ítélnék. Arra juthatunk tehát, hogy mindkét játékosnak inkább vallani érdemes, bármit is választ a másik. Ekkor mindketten négy évet kapnak, vagyis sokkal rosszabbul járnak, mintha egyhangúan tagadtak volna.

A fogolydilemmával a legkülönbözőbb területeken találkozhatunk: valójában a kooperáló és önző magatartásformák viszonyát írja le. Lássunk néhány példát. Tegyük fel, hogy egy kisvárosi piac szabályzata szerint a kofáknak reggel pontban hatkor kell kiírni az árakat, és onnantól nem változtathatnak. Két zöldséges árul krumplit; mindketten 100 forintért szerzik be kilóját. Sokáig mindketten 150 forintért árulják, a vevők fele-fele jár hozzájuk, és mindketten haszonra tesznek szert. Egy ravasz vevő elmagyarázza azonban mindkettőnek, hogy ha másnap 130 forintra vinné le az árat, akkor kevesebb haszna lenne egy kiló krumpliból, de átcsábíthatná a másik összes vevőjét, és így összességében jobban járna. Másnap reggel háromnegyed hatkor mindketten gondterhelten leskelődnek a másik árus felé. Ha ugyanis egyikük megmarad a 150 forintnál, a másik pedig leviszi 130-ra, akkor a 150-es nyakán marad a sok zsák krumpli. Ha végül mindketten a 130 forintot választják, akkor 40%-kal csökken mindkettejük profitja (a vásárlók nagy örömére).

Klasszikus fogolydilemma szituációként szokták leírni a hidegháborús fegyverkezési versenyt. A két játékos Amerika és a Szovjetúnió. Mindketten választhatnak, hogy mekkora összeget fordítanak a fegyverkezésre. Ha csak az egyikük fegyverkezik, a másik pedig nem, vagy alig, akkor az előbbi fegyverrel vagy fenyegetéssel leigázhatja az utóbbit. Ugyanaz marad a politikai helyzet, ha mindketten fegyverkeznek, vagy egyikük sem; viszont az előbbi esetben hatalmas összegeket fognak kifizetni.



8. ábra

Egy informatikai példát szemléltet a 8. ábra. Két szolgáltató van, akik az X és Y pontokban tudják a forgalmat a másik hálózatára átküldeni. A szolgáltatók költsége a saját hálózatukban használt élek száma. Az első szolgáltatónak s_1-ből t_1-be, a másiknak pedig s_2-ből t_2-be kell bizonyos adatmennyiséget továbbítania. Mindketten kétféle utat választhatnak: 2 vagy 4 egység hosszút. A 2 hosszú út teljesen a saját hálózatukon belül megy, a 4 egység hosszúból azonban csak egy él megy a sajátban, három pedig a másikén belül. Az első felel meg az együttműködő, a második az önző magatartásnak. Ha mindketten a rövidebb utat használják, mindkettejük költsége 2; ha mindketten a hosszabbat, akkor a költségük 4. Ha viszont csak az egyik választja a rövidebb utat, a másik a hosszabbat, akkor az együttműködő költsége 5, az önzőé 1. A nyereségmátrix tehát azonos lesz a fogolydilemmában szereplővel.

Következő példaként tegyük fel, hogy egy gyanús külvárosi piacon próbálok aranyékszert venni. Az árus eladhat igazi ékszert vagy hamisat, én pedig fizethetek érte igazi vagy hamis pénzzel. Többet nem látjuk egymást: mire kiderül, hogy bóvli az ékszer, már bottal üthetem a nyomát. Érthető okokból ő sem fog a hamis pénz miatt feljelentést tenni. Ha igazi ékszert kapnék igazi pénzért, azzal mindketten jól járnánk; ha viszont a hamisítványért fizetem ki az igazi pénzt, ugyanúgy bosszankodhatok, mint ő, hogyha hamis pénzt adok valódi aranyért. Végül tehát a valószínű kimenet az, amikor mindketten becsapjuk a másikat.

Az előző példa valójában tetszőleges szerződéses viszonyra alkalmazható: ha az egyik szerződő fél felrúgja a megállapodást, a másik pedig tisztességes és teljesíti a kötelességét, az előbbi nagyobb haszonra tesz szert, mintha mindketten tartották volna a megállapodást. Mind a gazdaság, mind a jogrendszer működéséhez szükség van valamiféle olyan nyomásra, ami kikényszeríti a szerződések betartását. Ilyen kényszert jelenthet az állam, aki a hatóságokkal megtoroltatja a törvények és szerződések megszegését. Egy másik kényszerítő tényező a közvélemény ereje: hogyha tisztességtelen az üzleti magatartásom, többet senki nem fog velem üzletelni; ha a társadalmi korlátokat hágom át, kiközösítenek.

Ez utóbbi hatást játékelméleti szempontból az **iterált fogolydilemma** írja le: tegyük fel, hogy ugyanaz a két játékos egymás után sokszor játsza le a fogolydilemmát. Mint láttuk, egyetlen játék esetén mindenképp a vallomás a kifizetődőbb. Ha azonban ezt további játékok követik, azokban a másik játékos bosszút tud állni az árulásért. A tagadás jutalma tehát – a pillanatnyi alacsonyabb nyereséggel szemben – a hosszútávú együttműködésből származó haszon. Egy, a gyakorlatban legjobbnak bizonyuló stratégia a **tit-for-tat**: az első játékban tagadok, és minden további játékban azt cselekszem, amit ellenfelem az előző játékban. Vagyis ha a másik vall, akkor a következő körben büntetésből én is vallok; ha azonban legközelebb tagad, akkor megbocsátok neki, és utána én is tagadni fogok. Ha mindketten ezt a stratégiát játsszák, akkor végig mindketten tagadni fognak.[1]

Az iterált fogolydilemma gyakorlati alkalmazására példa a peer-to-peer fájlcserélő rendszerek működése. Itt az egyes felhasználók szeretnének valamilyen tartalomhoz hozzájutni, amit a többiek osztanak meg velük. A kényelmes potyautas stratégia, ha a felhasználók csak letöltenek, és letiltják vagy erősen korlátozzák a feltöltést: hiszen részükről ennek költsége van (sávszélesség, processzorhasználat.) Természetesen ha túl sok a potyautas, a rendszer nem tud működni; ez több korábbi fájlcserélőnél is

[1] Valójában további finomításokra van szükség. Ha pl. mindketten ezt játszák, de az egyikük egyetlen alkalommal véletlen – vagy kommunikációs hiba miatt – vall, akkor utána egy „ő ütött előbb” ördögi körbe kerülnek, ahol felváltva fog mindig az egyik vallani, a másik tagadni.

komoly problémát jelentett.

A Bittorrent megoldása az, hogy a felhasználókat egy iterált fogolydilemmába kényszeríti bele. Ha le szeretnék tölteni egy fájlt, összesorsolnak néhány tucat másik felhasználóval (peer-ek), akik szintén ugyanezt szeretnék tölteni (és már rendelkeznek valamekkora részével). Közülük néhánnyal kapcsolatot hozok létre. Kezdetben ingyen engednek tölteni; ha azonban már valamekkora résszel rendelkezek, ők is adatot várnak el cserébe. Az együttműködő magatartás az, hogyha viszonzásként én is engedem őket tölteni, de potyautasként ezt meg tudom tiltani. Erre viszont ők reagálhatnak azzal, hogy nem adnak további adatokat, illetve megszüntetik a kapcsolatot. [2] Lényeges, hogy kisszámú peer-rel tudok csak kapcsolatot létesíteni; ez tudja kivédeni azt, hogy csupa különböző felhasználótól szerezzek valamennyi adatot, majd amikor viszonzást várnának, tovább tudjak állni egy másikhoz.

2.2. Domináns stratégiák

Adott S_i stratégiahalmazok és $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ esetén az $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ stratégiaválasztás **Pareto-optimális**, ha nincsen olyan másik $\mathbf{s}' \in S$ stratégiaválasztás, amivel mindenki legalább annyira jól jár, mint $\mathbf{s}$-sel, és legalább egyvalaki szigorúan jobban jár, azaz $u_i(\mathbf{s}') \geq u_i(\mathbf{s})$, és legalább egy helyen szigorú egyenlőtlenség áll. Ha van ilyen $\mathbf{s}'$, akkor $\mathbf{s}$-et Pareto-szuboptimálisnak hívjuk. Véges játékban könnyen látható, hogy mindig létezik Pareto-optimális stratégiaválasztás.

Ha $z, z' \in S_i$ az i. játékos két stratégiája, akkor azt mondjuk, hogy z **gyengén dominálja** z'-t, ha z-vel mindig legalább olyan jól jár, mint z'-vel, vagyis

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

a többi játékos összes lehetséges s_j stratégia választása esetén. z **erősen dominálja** z'-t, ha mindig szigorú egyenlőtlenség áll, vagyis a többiek bármely $s_j \in S_j$ $(j \neq i)$ stratégiáira

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n) > u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Dominált stratégiát racionális játékosnak nem érdemes választani. Egy stratégia **domináns**, ha a játékos összes többi stratégiáját dominálja. A fogolydilemmában a vallomástétel dominálja a tagadást, tehát az a legjobb stratégiaválasztás, ha mindketten vallanak. Ez azonban egy Pareto-szuboptimális stratégia, hiszen mindketten jobban járnának, ha mindketten tagadnának. (Ez azért van, mert most a játékot csak egyetlen egyszer játszuk le; a k iterációban ismételt fogolydilemma esetén egy stratégia az, ami minden $i = 1, \ldots, k$-ra megmondja, hogy az előző $i - 1$ játék kimenetelét figyelembe véve hogyan döntünk az i. körben.)

Iterált eliminálás

Az **iterált eliminálás erős változata** során amíg van olyan stratégiája valamely játékosnak, amit erősen dominál egy másik stratégiája, a domináltat töröljük. A motiváció az, hogy egy racionális játékos nem választ dominált stratégiát. A **gyenge változat** hasonló, de minden gyengén dominált stratégiát törlünk (tehát a gyenge változatnál törlünk esetleg többet). A módszerrel a stratégiák számát gyakran lényegesen redukálhatjuk. Ha a fogolydilemmára alkalmazzuk az iterált eliminálást, akkor egyetlen kimenetel marad, az, hogy mindketten vallanak. Ez tehát példa arra, hogy az iterált eliminálásnál, még ha csak egyetlen kimenetel is marad, az nem feltétlen Pareto-optimális.

Egy másik példaként nézzük az **adózási játékot**, aminek a következő a normál formája.

adózó \ NAV	ellenőriz	nem ellenőriz
hazudik	1, 3	4, 1
igazat mond	2, 2	3, 3

Itt nem tudunk semmit törölni az iterált eliminálással. Megjegyezzük, hogy lehet konstruálni bármekkora játékot, ahol szintén nem tudunk törölni semmit.

[2] Természetesen ezeket a döntéseket helyettem a számítógépemen futó kliensek hozzák; többnyire a tit-for-tat stratégiát alkalmazva. A kliensben beállíthatom a sávszélességi korlátokat, illetve egyes programokban a stratégiát is változtathatom.

2.1. feladat. *Alkalmazd az iterált eliminálást az alábbi játéknál:*

1. \ 2.	B	K	J
F	2, 3	0, 2	1, 1
A	1, 1	5, 0	0, 4

Pareto-optimális-e az ésszerű kimenetel?

2.2. feladat. *a) Mutasd meg, hogy akármilyen sorrendben töröljük a dominált stratégiákat az iterált eliminálás erős változatánál, a megmaradó stratégiák mindig ugyanazok.*

b) Adj olyan példát, ahol az iterált eliminálás gyenge változatánál más sorrendeknél nem ugyanazok a stratégiák maradnak, sőt, a megmaradó táblázat se ugyanaz.

Harmadik példaként tekintsük a következő játékot. Két játékos egymástól függetlenül leír egy papírra egy 1 és 100 közti egész számot, majd összehasonlítják őket. Ha a két szám közt egy a különbség, akkor a kisebb számot választó fizet 1 eurót a nagyobb számot választónak. Ha viszont legalább kettő a különbség, akkor épp fordítva, a nagyobb számot választó fizet 2 eurót a kisebbet választónak. Ugyanakkora számok esetén senki sem fizet a másiknak. A táblázat sorjátékos nyereségét mutatja (az oszlopjátékos nyeresége épp ennek az ellentettje).

	1	2	3	4	5	6	.	.	.	100
1	0	-1	2	2	2	2	.	.	.	2
2	1	0	-1	2	2	2	.	.	.	2
3	-2	1	0	-1	2	2	.	.	.	2
4	-2	-2	1	0	-1	2	.	.	.	2
5	-2	-2	-2	1	0	-1	.	.	.	2
.										
.										
.										
99	-2	-2	.	.	.			1	0	-1
100	-2	-2	.	.	.			-2	1	0

Láthatjuk, hogy ha a sorjátékos legalább négyet mond, akkor minden egyes esetben rosszabbul vagy ugyanúgy jár, mintha egyet mondana. Ugyanez teljesül minden négynél nagyobb választása esetén is, ezeket a stratégiákat tehát nem fogja választani. Hasonlóképpen, az oszlopok közül is az első három kivételével az összes többi eltávolítható. Ezáltal a játékot egy 3×3-as mátrixszal leírhatóra tudtuk visszavezetni. Ebben már nincsenek további dominált stratégiák, elemzéséhez más fogalmakra lesz szükségünk.

2.3. Tiszta Nash-egyensúly

$1 \leq i \leq n$-re jelöljük S_{-i}-vel a $\times_{j \neq i} S_j$ halmazt, vagyis az S_i-től különböző stratégiahalmazok szorzatát. Ennek elemeit **részleges stratégiaválasztásnak** nevezzük: az i játékos kivételével minden játékoshoz ki van jelölve egy stratégia. Egy $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_{-i}$ részleges stratégiaválasztást röviden $\mathbf{s_{-i}}$-vel jelölünk; a $(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ vektort pedig $(z, \mathbf{s_{-i}})$ rövidíti.

Egy $\mathbf{s_{-i}}$ részleges stratégiaválasztásra az i játékos egy **legjobb válasza** egy olyan z stratégia, amire $u_i(z, \mathbf{s_{-i}})$ maximális. Legjobb válasz persze több is lehet, és ha S_i nem véges, akkor lehet, hogy nincs.

Egy $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ stratégiaválasztás **tiszta Nash-egyensúly**, ha minden i játékos esetén az s_i stratégia legjobb válasz az $\mathbf{s_{-i}}$-re, vagyis ha egyik játékos sem járhat jobban, ha megváltoztatja a stratégiáját, feltéve, hogy a többiek nem változtatnak. Formálisan, minden i játékosra

$$u_i(s_i, \mathbf{s_{-i}}) \geq u_i(z, \mathbf{s_{-i}}) \text{ tetszőleges } z \in S_i\text{-re.}$$

Tiszta Nash-egyensúlyt tudunk keresni a következő módszerrel. A normál formájában minden i játékosra és minden $\mathbf{s_{-i}}$ részleges stratégiaválasztásra jelöljük meg egy * jellel az i minden z legjobb válaszára a normál forma $(z, \mathbf{s_{-i}})$-hez tartozó mezejében az i-hez tartozó számot. Például a fogolydilemmánál a következőt kapjuk:

1. \ 2.	Vall	Tagad
Vall	-4*, -4*	-1*, -5
Tagad	-5, -1*	-2, -2

Egy stratégiaválasztás pontosan akkor Nash-egyensúly, ha a neki megfelelő mezőben mindegyik számnál van *. Ezesetben tehát a (Vall, Vall) az egyetlen tiszta Nash-egyensúly.

Ha minden játékosnak van domináns stratégiája (mint a fogolydilemmában), akkor azok Nash-egyensúlyt alkotnak. Nézzünk olyan példát, amikor ez nem teljesül. A **nemek harca** játékban egy fiú és egy lány szeretné eldönteni, hogy Quimby vagy Tankcsapda koncertre menjen. A lány inkább a Quimbyt, a fiú inkább a Tankcsapdát szeretné, viszont mindkettejüknek az a legfontosabb, hogy együtt menjenek valahova.

Fiú \ Lány	Quimby	Tankcsapda
Quimby	1*, 2*	0, 0
Tankcsapda	0, 0	2*, 1*

Itt két Nash-egyensúly is van, ha mindketten a Quimbyt vagy mindketten a Tankcsapdát választják. Tegyük most fel, hogy valójában a Quimbyt szeretik mindketten jobban, ez 2-2, a Tankcsapda pedig 1-1 egység örömöt szerez. Ekkor is mindkét azonos választás Nash-egyensúlyban van, annak ellenére, hogy a Tankcsapda egyértelműen rosszabb (Pareto-szuboptimális).

A fogolydilemához hasonló **héja-galamb** játék konfliktushelyzetek modellezését célozza (kocsmai verekedések, háborúk, biológiában az egyedek vetélkedése egy fajon belül stb.). Mindkét félnek két stratégiája van, a provokáló (héja) és a kompromisszumkereső (galamb). A hasznossági mátrix a következő.

	Héja	Galamb
Héja	0, 0	4*, 1*
Galamb	1*, 4*	3, 3

Itt két Nash-egyensúly van, azok, amikor ellentétes szerepeket játszanak: az egyik héja, a másik pedig galamb. A játék másik elnevezése a „gyáva nyúl" : helyi vagányok azon játéka, amikor egy keskeny egyenes úton egymással szembe indul két autós. Amelyik előbb félrerántja a kormányt, az gyáva nyúl, gúny és megvetés tárgya. Ha viszont egyik sem rántja félre, akkor két bátor halottal lesz gazdagabb a helyi legendárium.

Az **azonos érmék** játékban ketten egy-egy érmét fejre vagy írásra fordítanak és ha a két érme egyforma, akkor az első kap egy dollárt a másiktól, ha különböző, akkor a második az elsőtől.

1. \ 2.	Fej	Írás
Fej	1*, -1	-1, 1*
Írás	-1, 1*	1*, -1

Látható, hogy ebben a játékban nincs tiszta Nash-egyensúly.

2.3. állítás. *Ha az iterált eliminálás bármely változata egyetlen stratégiaválasztással ér véget, akkor az tiszta Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Ha az eliminálás során az i játékos z stratégiája miatt töröltük egy z' stratégiáját, és ekkor az $\mathbf{s}_{-i}$-beli stratégiák még nem voltak törölve, akkor $u_i(z, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(z', \mathbf{s}_{-i})$. Tegyük fel, hogy a végén $\mathbf{s}$ marad csak és legyen $z \neq s_i$ egy másik stratégiája i-nek. z-ből lépjünk az i azon a stratégiájára, ami miatt töröltük, és így tovább, egészen addig, amíg s_i-be érünk. Eközben az i nyeresége $(u_i(., \mathbf{s}_{-i}))$ nem csökkenhetett, emiatt $u_i(z, \mathbf{s}_{-i}) \leq u_i(\mathbf{s})$, tehát $\mathbf{s}$ tiszta Nash-egyensúly. □

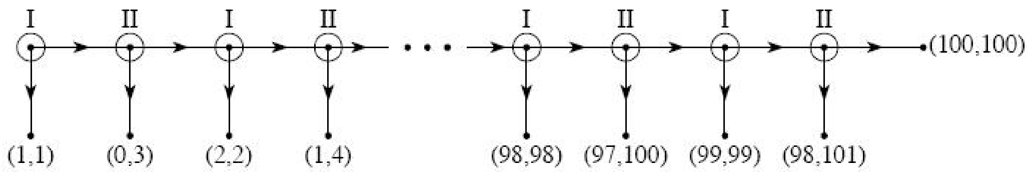
2.4. állítás. *Az iterált eliminálás erős változatánál nem törlünk olyan stratégiát, ami szerepel tiszta Nash-egyensúlyban.*

2.5. feladat. *Bizonyítsd be a 2.4. állítást!*

Kombinatorikus játékoknál egy nyerő stratégia egy olyan stratégia, aminél a játékosnak a nyeresége 1, a másik bármely stratégiájánál, tehát a vesztes játékos bármit választ, -1 a nyeresége. Emiatt a tiszta Nash-egyensúlyok pont azok a stratégiaválasztások lesznek, amiknél a nyerő játékos nyerő stratégiát választ.

Próbálhatnánk azzal a módszerrel tiszta Nash-egyensúlyt keresni, hogy kiindulunk egy tetszőleges stratégiaválasztásból és minden lépésben az egyik játékos válthat stratégiát egy olyanra, aminél többet nyer. Ám ez nem feltétlen talál Nash-egyensúlyt, ugyanis ciklizálhat, akkor is, ha egyébként van Nash-egyensúly, például az adózási játéknál ciklizál, és kiegészíthetjük egy-egy harmadik stratégiával, amik Nash-egyensúlyt alkotnak együtt, de az eredeti részből egyik játékos se akarna átlépni.

A tiszta Nash-egyenúly a játék ésszerű kimenetelét hivatott megfogni. Ám az alábbi **százlábú** játék mutatja, hogy nem minden esetben jósolja meg jól a játékosok viselkedését. A játékot sok lépésesként írjuk le, de ugynúgy, mint a kombinatorikus játékoknál, ez is felírható stratégiai játékként. Két játékos játszik és felváltva lépnek. Először az első játékos dönt, hogy egyből kiszáll, és mindkettőjüknek 1 a nyeresége, vagy folytatódik a játék. Ezután a második játékos vagy befejezi, és az ő nyeresége 3 míg az első játékosé 0, vagy a folytatás mellett dönt. A játék további menete a 9. ábrán látható.



9. ábra

Iterált eliminálással belátható, hogy csak az a Nash-egyensúly, ha mindketten rögtön ki akarnak lépni. Viszont a valóságban inkább folytatják a játékot, reménykedve, hogy a másik is folytatja majd.

2.6. feladat. *Egy választáson két jelölt indul, A és B, és a 2k választóból k A-t, k B-t preferálja. Ha egy választó kedvence nyer, az neki +2-t ér, ha a másik, az −2-t, ha döntetlen, az 0-t. Ha elmegy szavazni, akkor az −1. (Tehát a lehetséges nyereségek -3, -2, -1, 0, 1, 2.) Keresd meg a tiszta Nash-egyensúly(oka)t!*

2.7. feladat. *Az előző feladathoz hasonló választás, most 3 választóval, akik közül ketten A-t, a harmadik B-t támogatja. Van-e tiszta Nash-egyensúly?*

Szennyezési és közlegelő játék

A következő két játék a fogolydilemma sokszereplős általánosításának tekinthető. A **szennyezési játékban** $n > 3$ ország szerepel. Mindegyik kétféle környezetpolitikát alkalmazhat: ha nem korlátozza a szennyezést, az 1 pénzegység kárt okoz - számára, és minden másik ország számára is. A szennyezés visszafogása 3 egységnyi befektetést igényel, ezt csak neki kell kifizetnie. Ha mindegyik ország visszafogja a szennyezést, mindegyiknek 3 lesz tehát a költsége - ha viszont mindenki szennyez, akkor mindenkinek n költséget okoz a szennyezés. Mégis, ez utóbbi forgatókönyv a természetes: ha ugyanis egy ország környezetvédelemről áttér szennyezésre, a többiek pedig nem változtatnak a politikájukon, akkor ez az ország 2-vel csökkenteni tudja a költségét (és közben az összes többiét 1-gyel megemeli). Az egyetlen tiszta Nash-egyensúly az, amikor mindenki szennyez.

A **közlegelők tragédiájában** egy falu legelője tíz tehenet tud eltartani. Tíz gazda legelteti egy-egy tehenét, mindegyik jóllakik és 10 liter tejet ad. Jól mennek a gazdaságok, úgyhogy mindegyik gazdának összegyűlik elég pénze egy második tehén vásárlására. Egy nap egyikük vesz is még egyet: már tizenegyen legelnek. Mostmár kevesebb fű jut minden tehénnek, ezért csak 9 liter tejet adnak. A két tehenet legeltető gazda viszont 18 liter tejhez jut. Általában, ha k tehén van, akkor $20-k$ liter tejet adnak. Ezért mindaddig érdemes egy gazdának új tehenet kihajtani a legelőre, amíg a tehenek száma el nem éri a 18-at. Vagyis a tiszta Nash-egyensúly az lesz, amikor nyolc gazdának van két tehene, két gazdának pedig egy-egy, és minden tehén 2 liter tejet ad. Ekkor összesen 36 liter tejet fejnek sovány, beteg tehenekből, szemben a kiindulási 100 literrel. Míg a szennyezési játékban az egyes játékosok döntéseiből következő költségek egyszerűen összeadódtak, itt ezek a döntések erősen befolyásolják egymást: ha már 8 gazda vett második tehenet, akkor a maradék kettőnek nem érdemes.

Cournot duopólium

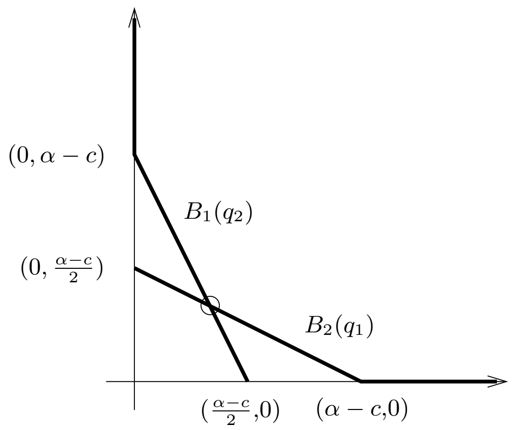
Ebben a játékban két cég megválaszthatja, hogy mennyit gyárt egy adott áruból: tetszőleges $q_i \in \mathbb{R}_+$ lehet a mennyiség ($i = 1, 2$). Itt tehát a stratégiahalmazok kontinuum méretűek. Jelölje $Q := q_1 + q_2$ a két cég által termelt összmennyiséget az áruból. A gyártás egységnyi költsége mindkét cégnek $c > 0$. Egy egységnyi árut $P(Q) := \max\{0, \alpha - Q\}$ forintért tudnak eladni, egy rögzített α paraméterre. Tehát a nyereségfüggvénye az i játékosnak

$$u_i(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2) \cdot q_i - c \cdot q_i = \begin{cases} q_i \cdot (\alpha - q_1 - q_2 - c), & \text{ha } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -q_i \cdot c, & \text{ha } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

A feladat a tiszta Nash-egyensúlyok meghatározása.

Számoljuk ki először, hogy egy adott q_2-re az első cégnek mi a legjobb válasza! Jelöljük ezt $B_1(q_2)$-vel, tehát $B_1(q_2) = \operatorname{argmax}_{q_1 \in \mathbb{R}_+} u_1(q_1, q_2)$. Ha $q_2 \geq \alpha - c$, akkor $P(Q) \leq c$ minden q_1-re, így $u_1(q_1, q_2) \leq 0$ és csak $q_1 = 0$-ra éri el a 0-t. Ha pedig $q_2 < \alpha - c$, akkor az $(\alpha - q_1 - q_2 - c) \cdot q_1$ másodfokú függvény maximuma $q_1 = \frac{\alpha - c - q_2}{2}$-ben van, amire $P(Q) = \alpha - Q$, tehát ez az egyértelmű legjobb válasz.

Összegezve, $B_1(q_2) = \max\{0, \frac{\alpha - c - q_2}{2}\}$, és ugyanígy, a második játékos legjobb válasza q_1-re $B_2(q_1) = \max\{0, \frac{\alpha - c - q_1}{2}\}$.



10. ábra

A tiszta Nash-egyensúlyok azon (q_1, q_2) párok, ahol a $\{q_1, B_2(q_1)\}$ és $\{B_1(q_2), q_2\}$ halmazok metszik egymást. A 10. ábra alapján ez egyetlen pont, méghozzá a $q_1 = q_2 = \frac{\alpha - c}{3}$ pont. Ekkor mindkét cég nyeresége $\frac{(\alpha - c)^2}{9}$.

A játék érdekessége, hogy ha csak egy cég lenne, akkor a nyereségének maximuma $\frac{(\alpha - c)^2}{4}$ lenne, ami több, mint duopólium esetén a két cég össznyeresége. Ráadásul, ha mindkét cég $q_1 = q_2 = \frac{\alpha - c}{4}$-et termel, akkor mindkettőnek több a haszna, mint a Nash-egyensúly esetén. Ez tehát a fogolydilemma egy folytonos rokona, és azt sugallja, hogy a monopólium néha jobb, mint a duopólium.

2.4. Kevert stratégiák, kevert Nash-egyensúly

Vegyük észre, hogy az 1.4. tétel egy Nash-egyensúly létezését bizonyította kombinatorikus játékokra. Azonban általában ez nem garantált: már egy olyan egyszerű játékban sem létezik, mint első példánk, a kő-papír-olló. Valóban érezhető, hogy a „mindig követ játszok" típusú stratégiák nem igazán sikeresek; ezzel szemben jó módszernek tűnik a véletlenre bízni a választást. Ebben a fejezetben a Nash-egyensúly fogalmát terjesztjük ki oly módon, hogy véletlen stratégiaválasztást is megengedünk.

Az i. játékos egy **kevert stratégiája** alatt valószínűségi eloszlást értünk az S_i stratégiahalmazon. Ha S_i véges, akkor ez egy olyan $\sigma : S_i \to \mathbb{R}_+$ vektorral jellemezhető, amelyre $\sum_{z\in S_i} \sigma(z) = 1$. **Tiszta stratégia alatt** az értjük, hogy valamely $z \in S_i$-re $\sigma(z) = 1$ és $\sigma(z') = 0$ ha $z' \neq z$. Ezt χ_z-vel fogjuk jelölni.

Legyen Δ_i az i. játékos kevert stratégiáinak halmaza. Ha S_i véges és $|S_i| = m_i$, akkor Δ_i az m_i dimenziós standard szimplex, vagyis

$$\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^{m_i} : x_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1\}.$$

Legyen $\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n$ a kevert stratégiaválasztások halmaza. Ha a játékosok kevert stratégiái $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta$, akkor az $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ kimenetel valószínűsége

$$p_\sigma(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i).$$

Az $u_i(\sigma)$ **várható nyereség** alatt az i. játékos nyereségének a várható értékét értjük, ha a játékosok a σ kevert stratégiák szerint választanak:

$$u_i(\sigma) = \sum_{\mathbf{s}\in S} p_\sigma(\mathbf{s}) u_i(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{s}\in S} u_i(\mathbf{s}) \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i).$$

Egy kevert stratégiára a várható nyereségeket könnyen ki tudjuk számolni úgy, hogy a kifizetési mátrixba egy új sorként vagy oszlopként írjuk. Például az „azonos érmék" játékban ha az első játékos $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ eséllyel választ fejet vagy írást (vagyis feldob egy szabályos érmét), akkor a következőt kapjuk:

1. \ 2.	F	I
F	1, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1
$\frac{1}{2}$F+$\frac{1}{2}$I	0, 0	0, 0

A kevert stratégiák vizsgálatánál azzal a feltevéssel élünk, hogy a játékosoknak egy x várható nyereségű kimenetel ugyanolyan jó, mint egy x nyereségű tiszta kimenetel. Megjegyezzük, hogy ez egy erős feltevés: ha például $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerünk 1 millió Ft-ot, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig vesztünk ugyanennyit, akkor inkább nem is mennénk bele a játékba.

A $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta$ kevert stratégiák **kevert Nash-egyensúlyban** vannak, ha minden i játékosra

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\gamma, \sigma_{-i}) \quad \forall \gamma \in \Delta_i.$$

Mivel $u_i(\gamma, \sigma_{-i})$ az $u_i(s, \sigma_{-i})$ ($s \in S_i$) számok konvex kombinációja a γ szerinti együtthatókkal, ezért az egyenlőtlenséget valójában elég megkövetelnünk a tiszta stratégiákra, vagyis σ pontosan akkor van kevert Nash-egyensúlyban, ha minden i játékosra és minden $s \in S_i$ stratégiájára

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\chi_s, \sigma_{-i}).$$

Ebből következik az alábbi állítás.

2.8. állítás. *Legyen* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots s_n)$ *stratégiaválasztás és* $\chi_\mathbf{s} = (\chi_{s_1}, \ldots, \chi_{s_n})$ *a neki megfelelő tiszta stratégiák. Ekkor* $\mathbf{s}$ *pontosan akkor tiszta Nash-egyensúly, ha* $\chi_\mathbf{s}$ *kevert Nash-egyensúly.*

Egy $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots \sigma_n) \in \Delta_{-i}$ vektort **részleges kevert stratégiaválasztásnak** nevezünk. Egy $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$ részleges kevert stratégiaválasztásra $\gamma \in \Delta_i$-t **legjobb kevert válasz**, ha

$u_i(\gamma, \sigma_{-i})$ értéke a lehetséges legnagyobb. A σ kevert stratégia pontosan akkor van Nash-egyensúlyban, ha minden i-re σ_i legjobb válasz σ_{-i}-re.

Minden $z \in S_i$ tiszta stratégiára határozzuk meg $u_i(\chi_z, \sigma_{-i})$-t, a tiszta z stratégia hasznosságát σ_{-i}-vel szemben. Jelölje $Z_{\sigma_{-i}} \subseteq S_i$ azon $z \in S_i$ tiszta stratégiák halmazát, amelyekre $u_i(\chi_z, \sigma_{-i})$ maximális, ezeket az σ_{-i}-re adható **legjobb tiszta válaszoknak** nevezzük. supp(γ)-val jelöljük egy $\gamma \in \Delta_i$ stratégia **tartóját**, azon $z \in S_i$ stratégiák halmazát, melyekre $\gamma(z) > 0$.

2.9. lemma. *Egy $\gamma \in \Delta_i$ stratégia akkor és csak akkor legjobb kevert válasz σ_{-i}-re, ha supp$(\gamma) \subseteq Z_{\sigma_{-i}}$, tehát ha legjobb tiszta válaszokból van „kikeverve”.*

Bizonyítás. Legyen a legjobb tiszta stratégiáknál a várható nyereség X. A γ stratégia várható nyereségét így írhatjuk fel:

$$u_i(\gamma, \sigma_{-i}) = \sum_{z \in S_i} \gamma(z) u_i(\chi_z, \sigma_{-i}) \leq \sum_{z \in S_i} \gamma(z) X = X,$$

vagyis egy kevert stratégiával elérhető nyereség legfeljebb annyi, mint a tiszta stratégiákkal elérhető legjobb nyereség. Továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, hogyha $\gamma(z) > 0$ esetén $u_i(\chi_z, \sigma_{-i}) = = X$, ami épp az állítással ekvivalens. □

A következő fejezetben belátjuk Nash kulcsfontosságú tételét:

2.10. tétel (Nash, 1951). *Minden véges játékban létezik kevert Nash-egyensúly.*

Nézzünk először néhány példát.

2.11. állítás. *A* **kő-papír-olló** *játék egyetlen kevert Nash-egyensúlya az, amikor $\sigma_1 = \sigma_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy van másik Nash-egyensúly is; a szimmetria miatt feltehető, hogy $\sigma_1(\text{kő}) \leq \sigma_1(\text{papír}) \leq \sigma_1(\text{olló})$, és az első vagy második egyenlőtlenség szigorúan teljesül. Azt állítjuk, hogy a második játékos részéről papírt játszani nem tartozik a σ_1-re adható legjobb tiszta válaszok közé. Valóban,

$$u_2(\sigma_1, \chi_{\text{papír}}) = \sigma_1(\text{kő}) - \sigma_1(\text{olló}) < 0,$$

ezzel szemben

$$u_2(\sigma_1, \chi_{\text{olló}}) = -\sigma_1(\text{kő}) + \sigma_1(\text{papír}) \geq 0.$$

Az előző lemma szerint tehát $\sigma_2(\text{papír}) = 0$. Ugyanezzel az okoskodással azt kaphatjuk, hogy az első játékos részéről az olló nem egy legjobb tiszta válasz, vagyis $\sigma_1(\text{olló}) = 0$, ami ellentmondás. □

A szarvas-liba-vadászat (angolul **moose-goose-hunt**) nevű játékban n ember mindegyike választhat, hogy beáll a szarvasra vadászó csapatba, vagy elmegy egyedül libára vadászni ($n \geq 2$). A libára vadászók nyeresége c_l, a szarvasra vadászók viszont csak akkor tudják elejteni a szarvast, ha mind az n ember összefog, ekkor a nyereség fejenként c_{sz}, ami több, mint c_l, ha kevesebben mennek szarvasra, akkor 0 a nyereségük. Meg szeretnénk határozni a szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyokat, vagyis az olyan kevert Nash-egyensúlyokat, amiknél mindenkinek ugyanaz a kevert stratégiája. Legyen ez (p_{sz}, p_l).

Ha $p_{sz} = 1$ és $p_l = 0$, akkor mindenkinek c_{sz} a nyeresége, és ha valaki változtat, akkor rosszabul jár, tehát ez Nash-egyensúly. Ha $p_{sz} = 0$ és $p_l = 1$, akkor mindenkinek c_l a nyeresége, és ez is nyilván Nash-egyensúly.

Ha p_{sz} és p_l is pozitív, akkor a 2.9. lemma alapján mindkét tiszta stratégiának legjobb válasznak kell lennie a többiek választására egy i játékos részéről. Ha i a szarvast választja, akkor várható nyeresége $p_{sz}^{n-1} \cdot c_{sz}$, ha libát, akkor c_l, tehát $p_{sz}^{n-1} \cdot c_{sz} = c_l$, vagyis $p_{sz} = \sqrt[n-1]{\frac{c_l}{c_{sz}}}$ és $p_l = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{c_l}{c_{sz}}}$ alkotják a nem tiszta szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyt.

2.12. feladat. *Lássuk be, hogy a héja-galamb játékban a két tiszta Nash-egyensúly mellett még egy harmadik létezik, amikor mindketten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ arányban választanak a héja és galamb stratégia között!*

2.13. feladat. *Határozzuk meg a 2.2. fejezet végén levő számválasztási játék összes kevert Nash-egyensúlyát!*

Iterált eliminálás kevert stratégiákkal

Tegyük fel, hogy egy játékban az első játékos nyereségei a következők.

	B	J
F	3	0
K	0	3
A	1	1

Ha a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ kevert stratégiát választja, akkor várható nyeresége a másik mindkét stratégiájánál $\frac{3}{2}$. Tehát ez a kevert stratégia erősen dominálja az A stratégiát. (A dominálás fogalma természetesen kiterjeszthető kevert stratégiákra.) Tehát az A stratégiát kitörölhetjük, ezt nem érdemes választania a játékosnak.

Általában, ha van olyan σ kevert stratégiája például az első játékosnak, ami erősen dominál egy $s_1 \in S_1$ stratégiát, akkor az iterált eliminálás során s_1-et töröljük S_1-ből. Ezt ismételjük, amíg lehet, természetesen bármely játékosra.

2.14. állítás. *Sose törlünk kevert Nash-egyensúlyt, vagyis ha s_1-et töröljük, akkor ő nem szerepel kevert Nash-egyensúly tartójában.*

2.15. feladat. *Bizonyítsd be a fenti állítást.*

Megjegyezzük, hogy itt is igaz, hogy az iterált eliminálás fenti, erős változatánál a végeredmény nem függ a törlések választásától.

2.16. feladat. *Mutasd meg, hogy egy LP feladatként felírható, hogy van-e olyan kevert stratégia, ami dominál egy adott stratégiát.*

2.17. feladat. *Keresd meg az összes kevert Nash-egyensúlyt az alábbi játékban!*

	X	Y	Z
A	3, 4	5, 3	2, 3
B	2, 5	3, 9	4, 6
C	3, 1	2, 5	7, 4

Geometriai módszer

A Cournot duopóliumnál geometriai módszerrel határoztuk meg a tiszta Nash-egyensúlyt egy olyan játékban, ahol mindkét stratégiahalmaz a nemnegatív valósak halmaza. Most egy hasonló módszert írunk le, amivel a kevert Nash-egyensúlyokat lehet megkeresni egy kicsi, véges stratégiai játékban. Ha két játékos van és mindkettőnek csak két stratégiája, akkor a síkon ábrázolhatjuk a legjobb válaszokat, és így geometriailag meg tudjuk határozni a kevert Nash-egyensúlyokat. Nézzük példaként a nemek harca játékot!

Fiú \ Lány	Quimby	Tankcsapda
Quimby	1, 2	0, 0
Tankcsapda	0, 0	2, 1

Tegyük fel, hogy a lány y valószínűséggel választja a Quimbyt és $1-y$ valószínűséggel a Tankcsapdát. Mi erre a fiú legjobb válasza? Ha a fiú x valószínűséggel választja a Quimbyt, akkor a várható nyeresége

$$x \cdot y \cdot 1 + (1-x) \cdot y \cdot 0 + x \cdot (1-y) \cdot 0 + (1-x) \cdot (1-y) \cdot 2 = 3xy - 2x - 2y + 2 = x \cdot (3y-2) - 2y + 2.$$

$(x, 1-x)$ akkor legjobb kevert válasz $(y, 1-y)$-ra, ha ez maximális, vagyis

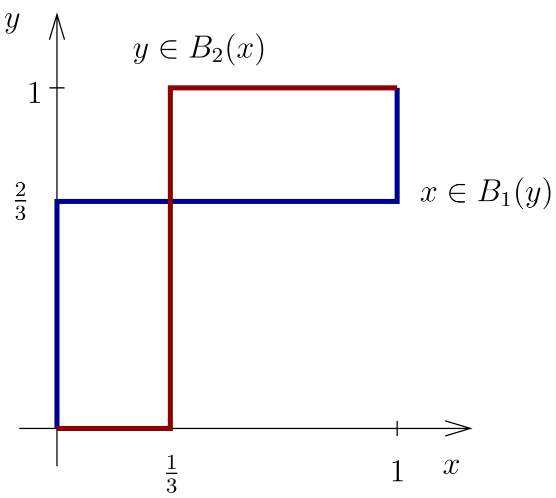
– $3y - 2 > 0$ esetén akkor, ha $x = 1$,

– $3y - 2 < 0$ esetén akkor, ha $x = 0$,

– $3y - 2 = 0$ esetén tetszőleges $x \in [0,1] - re$.

Jelöljük $B_1(y)$-nal ezen x-ek halmazát, tehát amikre $(x, 1-x)$ a fiú részéről legjobb kevert válasz a lány $(y, 1-y)$ kevert stratégiájára.

Ugyanígy meghatározhatjuk azon $(y, 1-y)$ kevert stratégiáit a lánynak, amik a fiú egy $(x, 1-x)$ kevert stratégiájára legjobb kevert válaszok: a lány várható nyeresége $y \cdot (3x-1) - x + 1$, tehát $x > 1/3$ esetén $y = 1$, $x < 1/3$ esetén $y = 0$, $x = 1/3$ esetén pedig tetszőleges $y \in [0,1]$. Jelöljük $B_2(x)$-szel ezen y-ok halmazát, tehát amikre $(y, 1-y)$ a lány részéről legjobb kevert válasz a fiú $(x, 1-x)$ kevert stratégiájára. Ábrároljuk a síkon a két halmazértékű függvényt!



11. ábra

Egy $((x, 1-x), (y, 1-y))$ kevert stratégiaválasztás pontosan akkor kevert Nash-egyensúly, ha (x, y) benne van a metszetben, vagyis jelen esetben a két tiszta Nash-egyensúlyon kívül van egy harmadik kevert Nash-egyensúly: ha a fiú $1/3$ valószínűséggel a Quimbyt választja, $2/3$ valószínűséggel a Tankcsapdát, a lány meg fordítva.

2.18. feladat. *Keresd meg az összes kevert Nash-egyensúlyt a következő jákékokban: azonos érmék, fogolydilemma, héja-galamb játék!*

2.5. Nash-tétel, Sperner-lemma és Brouwer fixpont tétele

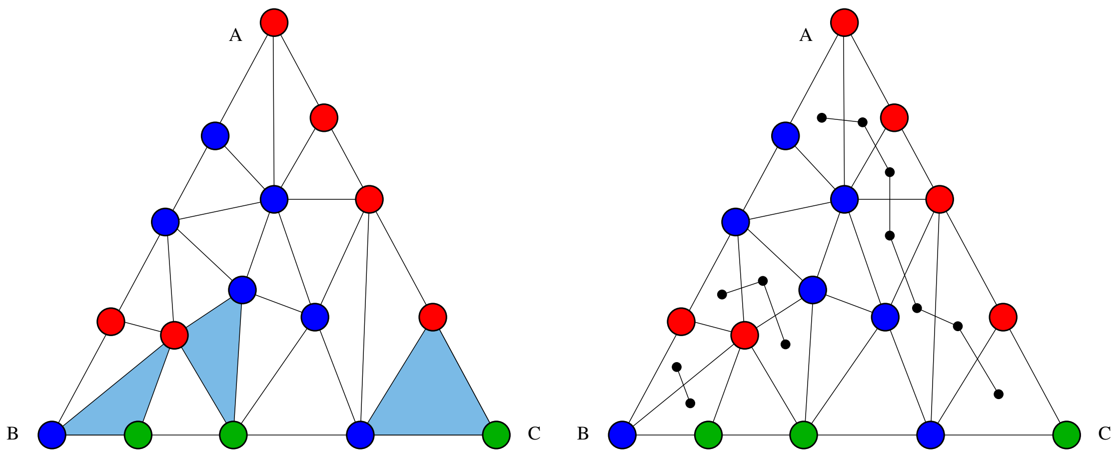
Nash egyensúlyi tételének bizonyításához szükségünk lesz Brouwer topológiából ismert fixpont tételére.

2.19. tétel (Brouwer, 1912). *Ha $C \subseteq \mathbb{R}^m$ egy konvex és kompakt halmaz, $f : C \to C$ egy folytonos függvény, akkor létezik olyan $x \in C$, amelyre $f(x) = x$.*

2.20. gyakorlat. *Igazoljuk a tételt $m = 1$ esetére!*

Brouwer tételének bizonyításához egy kombinatorikai állításra lesz szükségünk. Ezt először $m = 2$ esetére mondjuk ki és igazoljuk. Egy háromszög felosztása kis háromszögekre a következőt jelenti: felveszünk a háromszög oldalain illetve belsejében tetszőleges új pontokat. Ezeket összekötjük egymást nem metsző egyenes szakaszokkal úgy, hogy minden keletkező tartomány háromszög legyen. Minden szakaszra pontosan két háromszög illeszkedik, kivéve az oldalakon levő szakaszokat, amelyekre egy.

2.21. lemma (Sperner, 1927). *Legyen adott egy ABC háromszög tetszőleges felosztása kis háromszögekre. A kis háromszögek összes csúcsa ki van színezve a piros, kék és zöld színek egyikével, a következő szabályok szerint. A piros, B kék, C zöld; az ABC háromszög oldalain levő pontok a két végpont színének az egyikével vannak kiszínezve. Ekkor páratlan sok olyan kis háromszög létezik, amelynek mindegyik csúcsa különböző színű.*



(a) (b)

12. ábra

Bizonyítás. Nevezzük tarkának egy olyan háromszöget, amelynek a három csúcsa különböző színű. Definiálunk egy $H = (T, F)$ gráfot, melynek csúcsai az olyan háromszögek, amelyeknek legalább egy csúcsa piros és legalább egy kék. Két háromszögnek megfelelő csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha van közös oldaluk, amelynek az egyik végpontja piros, a másik kék (ld. 12(b) ábra)

Vegyük észre, hogy H-ban minden csúcs foka nulla, egy vagy kettő. Egy nem tarka T-beli háromszög foka egy, ha az egyik piros-kék oldala a nagy háromszög AB-oldalára esik (ezek száma legyen p); a többi nem tarka T-beli háromszög foka kettő. Egy tarka T-beli háromszög foka hasonló módon nulla vagy egy. A nulladfokú tarka háromszögek száma legyen q, az elsőfokúaké r.

Az AB oldalon páratlan sok piros-kék szakasz van, hiszen A-ból B felé haladva az osztópontokon páratlan sokszor változik a szín. Legyen ezek száma $2a + 1$. Ekkor $p + q = 2a + 1$, mivel minden ilyen élre illeszkedik egy T-beli háromszög, amely vagy nem tarka, vagy tarka.

H-ban a páratlan fokú pontok száma $p + r$, ez páros kell legyen; legyen $p + r = 2b$. (H valójában utakból, körökből és izolált pontokból áll.) A tarka háromszögek száma ekkor

$$q + r = (2a + 1 - p) + (2b - p) = 2(a + b - p) + 1, \tag{3}$$

valóban páratlan. □

A lemmát általánosítjuk magasabb dimenzióra is. m-dimenziós **szimplex** alatt az $\mathbb{R}^m$ térben $m +$ $+ 1$ általános pont konvex burkát értjük (olyan pontok, melyek nem esnek bele $(m - 1)$-dimenziós hipersíkba). Egy m-dimenziós szimplex **lapjai** $(m - 1)$-dimenziós szimplexek, amelyeket egy csúcs elhagyásával kaphatunk. (Az 1-dimenziós szimplexek éppen a szakaszok, a 0-dimenziósak a csúcsok voltak).

A szimpliciális felosztás a háromszögekre való felosztás általánosítása lesz. Legyen adott egy m-dimenziós szimplex. Ennek határán és belsejében felveszünk tetszőleges új pontokat; majd felveszünk rájuk illeszkedő $(m-1)$-dimenziós szimplexeket úgy, hogy azok ne messék egymást, és a végén keletkező tartományok mind m-dimenziós szimplexek legyenek. Ezeket „kis szimplexeknek” fogjuk nevezni. Egy színezett csúcsú szimplexet tarkának nevezünk, amennyiben minden csúcsa különböző színű.

2.22. lemma (Sperner, 1927). *Vegyük az $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ pontok által kifeszített m-dimenziós Δ szimplex egy tetszőleges szimpliciális felosztását. A felosztásban szereplő csúcsokat színezzük ki az $1,2, \ldots, m + 1$ színekkel úgy, hogy az A_i csúcs az i színt kapja, továbbá az S lapjaira eső pontok a lapon levő csúcs egyikének színét kapják. Ekkor a felosztásban páratlan sok tarka kis szimplex van.*

Bizonyítás. m szerinti indukcióval bizonyítunk. Az $m = 1$ eset triviális; a 2.21. lemma az $m = 2$ esetre bizonyít. Lényegében ugyanazt a bizonyítást ismételjük el.

Legyen T azon kis szimplexek halmaza, amelyeknek a csúcsain az $1,2, \ldots, m$ színek mindegyike szerepel. Egy ilyen szimplex vagy tarka, vagy valamelyik $1 \leq j \leq m$ szín kétszer szerepel, mindegyik más szín pontosan egyszer. Egy $(m-1)$-dimenziós szimplexet m-tarkának nevezünk, ha tarka, és csúcsain éppen az $1,2,\dots,m$ színek szerepelnek.

Definiáljuk a $H=(T,F)$ gráfot úgy, hogy két szimplexet akkor kötünk össze, ha van közös m-tarka lapjuk. Vegyük észre, hogy egy tarka szimplexnek pontosan egy m-tarka lapja van, egy nem tarka T-belinek pedig kettő. Egy m-tarka lapra pontosan két T-beli szimplex illeszkedik, ha a lap Δ-n belül helyezkedik el, és 1, ha Δ egyik lapján. A színezés tulajdonsága alapján Δ egyetlen olyan lapja, amely m-tarka szimplexet tartalmazhat, az $A_1,\dots,A_m$ pontok által kifeszített $(m-1)$-dimenziós Δ' szimplex.

Tekintsük ezt az Δ' lapot! Az eredeti m-dimenziós felosztás ezen egy $(m-1)$-dimenziós felosztást ad meg; ebben a tarkák éppen az m-tarka szimplexek. Az indukció szerint páratlan sok ilyen van, legyen a számuk $2a+1$. Közülük mindegyikre illeszkedik egy T-beli m-dimenziós szimplex; legyen ezek közül a tarkák száma q, a nem tarkák száma p, vagyis $p+q=2a+1$. Ezek fokszáma H-ban 0 illetve 1 lesz.

A maradék tarka szimplexek száma legyen r; ezek foka H-ban 1 lesz. A többi T-beli szimplex foka 2; ezek tehát azok, akik nem tarkák, és nincsen Δ'-re illeszkedő m-tarka lapjuk.

A 2.21. lemma bizonyításához hasonló érveléssel H-ban az elsőfokú pontok száma páratlan: $p+r = 2b$, innen (3) alapján következik, hogy a tarka szimplexek száma, $q+r$, páratlan. Ezzel a bizonyítás befejeződött. □

A 2.19. tétel bizonyítása. Csak arra az esetre bizonyítunk, amikor C egy m-dimenziós szimplex. Ebből itt nem részletezett topológiai megfontolások alapján következik az állítás tetszőleges konvex kompakt halmazokra. Jelöljük S-sel C felszínét, azaz lapjainak unióját! Tegyük fel indirekten, hogy a leképezésnek nincs fixpontja: $x \neq f(x)$ tetszőleges $x \in C$-re. Minden $x \in C$-re tekintsük az $f(x)x$ félegyenest, és legyen $T(x)$ az a pont, ahol ez S-t metszi! (Ha $f(x) \in S$, akkor $T(x)$-et a félegyenes S-sel vett másik metszéspontjaként definiáljuk.)

Ezáltal definiáltunk egy $T: C \to S$ leképezést. Ha $x \in S$, akkor világos, hogy $T(x)=x$. Könnyen látható továbbá, hogy ha f folytonos volt, akkor T is az. Színezzük most ki C minden pontját az $1,2,\dots,m+1$ színekkel úgy, hogy x a $T(x)$-hez legközelebbi A_i csúcs i színét kapja. Ha több csúcstól egyenlő távolságra van, válasszunk ezek közül tetszőlegesen. Teljesülnek a Sperner-lemma színezési feltételei: minden A_i csúcs színe i lesz, és C minden lapján a pontok e lap valamelyik csúcsának színét kapják.

Válasszunk egy „kicsi” $\varepsilon > 0$-t! Ehhez T folytonossága miatt létezik olyan δ, hogy ha $d(x,y) < \delta$ akkor $d(T(x),T(y)) < \varepsilon$. ($d(x,y)$ az x és y pontok távolságát jelöli.) Készítsünk el C-nak egy olyan szimpliciális felbontását, amelyben bármely kis szimplex átmérője (pontjai közt fellépő legnagyobb távolság) kisebb δ-nál!

A Sperner-lemma szerint van egy tarka szimplex: legyenek ennek csúcsai $x_1,\dots,x_{m+1}$, amelyek rendre az $1,2,\dots,m+1$ színekkel vannak kiszínezve. Ezen csúcsok közül bármely kettő távolsága kisebb δ-nál, ezért a $T(x_1),\dots,T(x_{m+1})$ pontok közül bármely kettő távolsága kisebb ε-nál. Mivel mindegyik pont a C szimplex felszínén, S-en helyezkedik el, ezért van egy olyan C' lapja C-nak, hogy az $x_1,\dots,x_{m+1}$ pontok mindegyike vagy C'-n, vagy ettől legfeljebb ε távolságra helyezkedik el. Legyen A_i a C'-n nem szereplő csúcs! Ekkor megfelelően kicsi ε-t választva ellentmondásra jutunk azzal, hogy $T(x_i)$-hez az A_i csúcs volt legközelebb. □

Készen állunk a Nash-tétel bizonyítására.

A 2.10. tétel bizonyítása. A kevert stratégiaválasztások halmaza, $\Delta = \prod_{i=1}^n \Delta_i$ az $m=\sum_i m_i$ dimenziós tér egy konvex, kompakt részhalmaza. Ezen szeretnénk egy folytonos f függvényt definiálni, melynek fixpontjai éppen a kevert Nash-egyensúlyoknak felelnek meg.

Legyen $\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_n) \in \Delta$ egy kevert stratégiaválasztás. Az i. játékos egy $z \in S_i$ stratégiájára legyen

$$\sigma'_i(z) := \sigma_i(z) + \max(0,\ u_i(\chi_z,\sigma_{-i}) - u_i(\sigma)),$$

vagyis ha z-vel i jobban jár, mint σ_i-vel, akkor növeljük a z valószínűségét. Ekkor viszont σ'_i már nem lesz valószínűségi eloszlás, tehát normalizálnunk kell (egy x nemnegatív vektor normalizáltja a $\mathrm{nrml}(x) := x/\sum x_i$):

$$f(\sigma) := (\mathrm{nrml}(\sigma'_1), \mathrm{nrml}(\sigma'_2), \dots \mathrm{nrml}(\sigma'_n)).$$

Könnyen látható, hogy $f : \Delta \to \Delta$ folytonos függvény. A 2.19. tétel szerint létezik egy $\sigma \in \Delta$, amelyre $f(\sigma) = \sigma$. Azt állítjuk, hogy ez egy kevert Nash-egyensúly, sőt a pontosan a fixpontok a kevert Nash-egyensúlyok. Ehhez azt kell belátnunk, hogy minden i játékosra

$$\sigma_i = \mathrm{nrml}(\sigma'_i) \iff \forall z \in S_i : u_i(\chi_z, \sigma_{-i}) \leq u_i(\sigma).$$

A „$\Longleftarrow$" irány világos. A „$\Longrightarrow$" irányhoz vegyük észre, hogy mindig van olyan z, amire $u_i(\chi_z, \sigma_{-i}) \leq$ $\leq u_i(\sigma)$. Ha indirekten lenne olyan z', amire $u_i(\chi_{z'}, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma)$, akkor a normalizálásnál 1-nél nagyobb számmal osztunk, ezért az előző z-re $\mathrm{nrml}(\sigma'_i(z)) < \sigma_i(z)$ lenne, ami ellentmond a feltevéssel. □

A feltételek közül a végesség nem hagyható el, ahogy az alábbi példa is mutatja. Tegyük fel, hogy ketten (X és Y) árulnak egy adott terméket, amire három potenciális vevő van (A, B és C). Mindhárman egy egységet szeretnének venni, és legfeljebb egy egységnyi pénzt fizetnek érte. X és Y stratégiái a termék lehetséges árai, vagyis a [0,1] intervallum egy-egy eleme (tetszőleges valós szám lehet). Az árat egyszerre kell kihirdetniük, később már nem változtathatnak. A mindenképpen X-től vásárol, C mindenképpen Y-tól, B pedig attól, aki olcsóbban adja; egyenlőség esetén azonban X-t preferálja. X és Y célja is bevételének maximalizálása.

2.23. állítás. *A fenti játékban nincsen tiszta Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Legyen x és y a kettejük által megszabott ár. Ha $x \leq y$, akkor X bevétele $2x$ és Y bevétele y. Ha $x > y$, akkor x illetve $2y$ a bevételük. Az $x < \frac{1}{2}$ választást egyértelműen dominálja $x = 1$, és ugyanígy $y < \frac{1}{2}$-et $y = 1$. Nash-egyensúly esetén tehát $x, y \geq \frac{1}{2}$. Ha $x \leq y$, akkor Y-nak jobban megérné egy kicsit aláígérnie X-nek. Ha viszont $x > y$, akkor Y-nak megérné egy kicsit növelnie. □

Kicsit bonyolultabb érveléssel megmutatható az is, hogy kevert Nash-egyensúly sincsen.

A Nash-tételre adható egy másik bizonyítás, ami a Brouwer fixpont-tétel helyett a következő, bonyolultabb fixpont-tételt használja.

2.24. tétel (Kakutani). *Ha $C \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, konvex, nem üres halmaz, és $f : C \to 2^C$ olyan halmazértékű függvény, amire teljesülnek a következők:*

- *minden $x \in C$-re $f(x)$ konvex, nemüres halmaz,*
- *f grafikonja zárt, vagyis ha $\{x_i\}$ és $\{y_i\}$ konvergens sorozatok, amikre $x_i \in f(y_i)$, akkor $\lim x_i \in$ $\in f(\lim y_i)$.*

Ekkor f-nek van fixpontja, vagyis olyan $x \in C$, hogy $x \in f(x)$.

2.25. feladat. *Bizonyítsd be Nash tételét a Kakutani fixpont-tétellel!*

Egy n játékosos játékot akkor nevezünk szimmetrikusnak, ha $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$ és a játékosok minden π permutációjára $u_i(s_1, \ldots, s_n) = u_{\pi(i)}(s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)})$. Egy σ kevert Nash-egyensúly szimmetrikus, ha $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$.

2.26. feladat. *Bizonyítsd be, hogy szimmetrikus játéknak van szimmetrikus kevert Nash-egyensúlya!*

2.6. Kétszemélyes 0-összegű játékok

A 2.10. tétel garantálja a kevert Nash-egyensúly létezését. A bizonyítás azonban nem ad semmiféle algoritmust arra, hogyan lehet egy egyensúlyt megtalálni. A következő alfejezetekben az egyensúly megtalálásának algoritmikus kérdéseit vizsgáljuk. Az első fontos eredmény Neumann Jánostól származik 1928-ból, amelyben 0-összegű véges kétszemélyes játékok egyensúlyát írta le, sok évvel a Nash-egyensúly általános fogalmának megszületése valamint a lineáris programozás elméletének kidolgozása előtt. A tételt most a lineáris programozás dualitás tételének következményeként mutatjuk be.

Emlékezzünk, hogy a 0-összegű játék olyan játék, amiben a játékosok nyereségének az összege 0 minden kimenetelnél. Ekkor a táblázatban elég az első játékos nyereségét feltüntetni, például a kő-papír-ollónál:

	Kő	Papír	Olló
Kő	0	-1	1
Papír	1	0	-1
Olló	-1	1	0

Vegyük észre, hogy ha az első játékos a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kevert stratégiával játszik, akkor bárhogy is játszik a másik, az elsőnek a várható nyeresége 0 lesz.

Most nézzünk egy másik példát, a **3 érmés játékot**. Ebben mindkét játékosnál van 3 amerikai érme: egy *nickel*, ami 5 centet ér, egy *dime*, ami 10-et, és egy *quarter*, ami 25-öt. Mindketten választanak egyet a három fajta érméből. Ha ugyanazt választották, akkor az első játékos kapja meg mindkettőt, ha különbözőt, akkor a második. Tehát az első játékos nyereségmátrixa a következő.

1. \ 2.	N	D	Q
N	5	-5	-5
D	-10	10	-10
Q	-25	-25	25

Tudja-e a második játékos garantálni, hogy pozitív legyen a várható nyeresége, akárhogy is játszik a másik? Vagyis van-e olyan kevert stratégiája, aminél a várható nyereség pozitív az első játékos mindhárom tiszta stratégiájára (így minden kevertre is!)? Igen, például ha egyenletes eloszlás szerint választ (most a 2. játékos nyereségeit írjuk fel):

1. \ **2.**	N	D	Q	$\frac{1}{3}$N+$\frac{1}{3}$D+$\frac{1}{3}$Q
N	-5	5	5	5/3
D	10	-10	10	10/3
Q	25	25	-25	25/3

Ekkor tehát a második játékos várható nyeresége mindig legalább 5/3, az első játékos bármely kevert stratégiájánál. Azt mondjuk, hogy a második játékos garantálni tud 5/3 nyereséget ezzel a kevert stratégiával. Ebből következik, hogy az első játékosnak nincs olyan kevert stratégiája, amivel ő több, mint -5/3 nyereséget tud garantálni. Ha az első játékos egyenletes eloszlással játszik, akkor a várható nyereségek:

1. \ 2.	N	D	Q
N	5	-5	-5
D	-10	10	-10
Q	-25	-25	25
$\frac{1}{3}$N+$\frac{1}{3}$D+$\frac{1}{3}$Q	-10	-20/3	10/3

Tehát legrosszabb esetben -10 a nyeresége, tehát ezzel a kevert stratégiával garantálja, hogy vesztesége legfeljebb 10 legyen.

Persze mindkettejüknek az az érdeke, hogy olyan kevert stratégiát találjanak, ami a lehető legnagyobb nyereséget garantál számukra. Neumann tétele azt mondja ki, hogy ez a két szám egymás ellentettje lesz, vagy másképp, ha X a maximális összeg, amennyi nyereséget az első garantálni tud magának, akkor a második tudja garantálni, hogy legfeljebb X-et veszítsen.

Tekintsünk egy tetszőleges 0-összegű játékot. Azt mondjuk, hogy egy játékos egy kevert stratégiával (legalább) α **várható nyereséget garantál** magának, ha a várható nyeresége a másik játékos összes tiszta stratégiájánál (így az összes kevert stratégiájánál is) legalább α. Hasonlóan, azt mondjuk, hogy egy játékos egy kevert stratégia által (legfeljebb) β **várható veszteséget garantál**, ha a várható vesztesége a másik minden stratégiájánál legfeljebb β.

2.27. tétel (Neumann, 1928). *Egy véges kétszemélyes 0-összegű játékban az egyik játékos által garantálható maximális várható nyereség egyenlő a másik játékos által garantálható minimális várható vesztességgel.*

Bizonyítás. Legyen $S_1 = \{1, \ldots, m\}$, $S_2 = \{1, \ldots, n\}$; $u_1(i, j) = -u_2(i, j)$. Jelölje $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ az első játékos nyereségmátrixát.

Ha $x \in \mathbb{R}^m$ az első játékos egy kevert stratégiája, mint oszlopvektor, akkor az x által garantált várható nyeresége az első játékosnak az $x^\mathsf{T} A$ vektor legkisebb koordinátája. A legnagyobb ilyet fel tudjuk írni az alábbi lineáris programmal ($\mathbf{1}$ mindig egy megfelelő dimenziós csupa-1 vektort jelöl):

$$\begin{aligned} \max \alpha &: \\ x^\mathsf{T} A &\geq \alpha \cdot \mathbf{1}^\mathsf{T} \\ \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1 \\ x &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{Q}$$

Hasonlóan, ha $y \in \mathbb{R}^n$ a második játékos egy kevert stratégiája, akkor az y-nal garantált várható vesztesége az Ay vektor legnagyobb koordinátája. A legkisebb ilyet az alábbi LP feladat adja:

$$\begin{aligned} \min \beta &: \\ Ay &\leq \beta \cdot \mathbf{1} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i &= 1 \\ y &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{P}$$

Ez a két lineáris program éppen egymás duálisa (miért?). A dualitás tétel alapján következik, hogy a két optimum-érték megegyezik. □

2.28. következmény. *Kétszemélyes 0-összegű játékban van kevert Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. A lineáris komplementaritási feltételek éppen azt mutatják, hogy ha (x, α) és (y, β) optimális megoldások, akkor x és y Nash-egyensúlyt alkotnak. □

Mivel a lineáris programozási feladat megoldására ismertek hatékony (polinomiális) algoritmusok, ez a bizonyítás algoritmust is szolgáltat az optimum megtalálására. Megjegyezzük, hogy ezzel szemben az általános esetben nem várható polinomiális algoritmus Nash-egyensúly keresésére.

2.29. feladat. *Határozzuk meg a három érmés játék kevert Nash-egyensúlyait!*

2.7. Kétszemélyes szimmetrikus játékok

Vegyünk most egy tetszőleges véges kétszemélyes játékot, amelyikben az első játékosnak n, a másodiknak m különböző stratégiája van. A nyereségeiket az A_1 illetve A_2 $n \times m$-es mátrixokkal írhatjuk le. (0-összegű játéknál $A_2 = -A_1$.) **Szimmetrikusnak** nevezzük a játékot, ha $n = m$ és $A_2 = A_1^\mathsf{T}$ (vagy lehet úgy permutálni a sorokat és oszlopokat, hogy ez teljesüljön). Ilyenek voltak például: kő-papír-olló, fogolydilemma, héja-galamb. Egy szimmetrikus játékban egy (σ_1, σ_2) kevert Nash-egyensúlyt **szimmetrikusnak** nevezünk, ha $\sigma_1 = \sigma_2$.

Vegyük észre, hogy ha ugyanazt az M számot hozzáadjuk A_1 és A_2 minden eleméhez, akkor a stratégiákat illetően semmi nem változik: pontosan ugyanazok lesznek a két játékban a Nash-egyensúlyok. Éppen ezért a továbbiakban azt is feltehetjük (egy kellően nagy szám hozzáadásával), hogy mind A_1, mind A_2 minden eleme szigorúan pozitív. A következő lemma azt mutatja, hogy ha egy szimmetrikus kétszemélyes játékban tudunk szimmetrikus Nash-egyensúlyt találni, akkor tetszőleges kétszemélyes játékban is tudunk.

2.30. lemma. *Tegyük fel, hogy egy kétszemélyes játék nyereségmátrixai, A_1 és A_2 csupa pozitívak. Vegyük azt a kétszemélyes szimmetrikus játékot, melyben a nyereségmátrixok $C \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ illetve C^T, ahol*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2^\mathsf{T} & 0 \end{pmatrix}.$$

Legyen ebben (τ, τ) egy szimmetrikus Nash-egyensúly, ahol $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ felbontásban τ_1 az első n, τ_2 pedig az utolsó m komponenst jelöli. Legyen a τ_1-beli komponensek összege c, a τ_2-belieké $1 - c$. Ekkor az eredeti játékban $(\sigma_1, \sigma_2) = (\frac{\tau_1}{c}, \frac{\tau_2}{1-c})$ egy kevert Nash-egyensúly.

Bizonyítás. Először be kell látnunk, hogy $0 < c < 1$. Jelölje a stratégiákat $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Tegyük fel először, hogy $c = 0$, vagyis $\tau_1 \equiv 0$. Ekkor az első játékosnak tetszőleges a_i tiszta stratégiára a nyeresége pozitív (mivel A_1 minden eleme pozitív), egy tetszőleges b_j-re viszont 0. Vagyis τ tartójában nem a legjobb tiszta válaszok szerepelnek, ellentmondásban a 2.9. lemmával. A játékosok szerepének felcserélésével következik $c < 1$ is.

Ha $\tau_1(a_i) > 0$, akkor a_i-nek legjobb tiszta válasznak kell lennie τ-ra, tehát $A_1\tau_2$-t az i. sornak maximalizálnia kell. Ebből következik, hogy az eredeti játékban is a_i legjobb tiszta válasz σ_2-re. Ugyanígy látható, hogy ha $\tau_2(b_j) > 0$ akkor b_j is legjobb tiszta válasz σ_1-re, amiből ismét a 2.9. lemma alapján készen vagyunk. □

A következőkben bemutatott **Lemke-Howson algoritmus** tetszőleges szimmetrikus kétszemélyes játékban keres szimmetrikus Nash-egyensúlyt. Az algoritmus véges lesz ugyan, de sajnos nem polinomiális futásidejű.

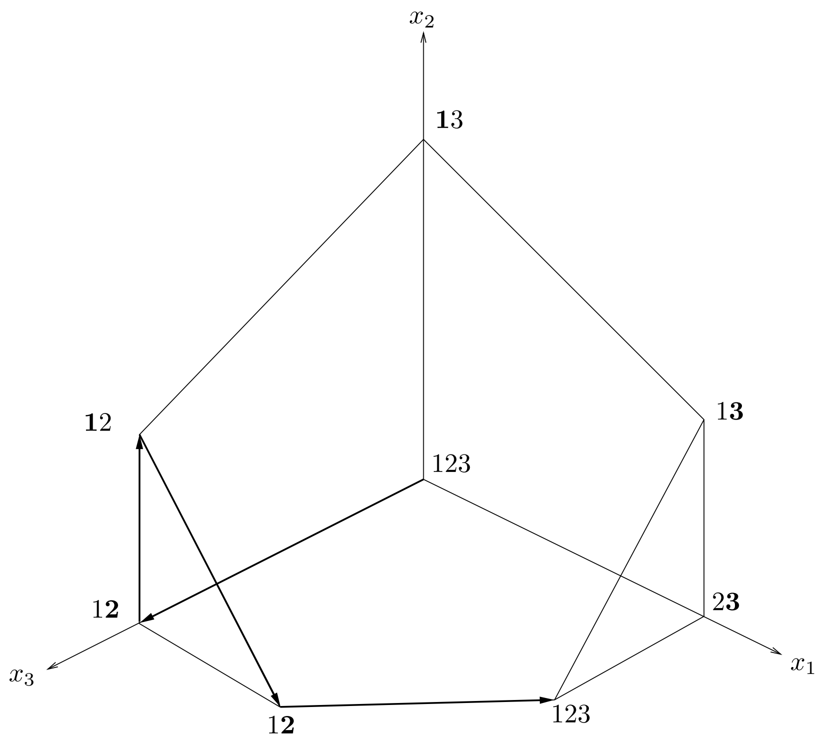
Legyen A az első játékos kifizetési mátrixa ($n \times n$-es). A 13. ábra szemlélteti az algoritmus menetét az alábbi mátrixszal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ismét feltehetjük, hogy A minden eleme szigorúan pozitív. Vegyünk egy x kevert stratégiát (azaz $\sum x_i = 1, x \geq 0$.) Legyen α az Ax vektor maximális értéke. Ha a második játékos x stratégiát választja, akkor az első játékos legjobb tiszta válaszai azon i indexekhez tartoznak, melyekre $(Ax)_i = \alpha$. Ennek megfelelően x pontosan akkor szimmetrikus Nash-egyensúly, ha az alábbi feltétel teljesül:

$$x_i = 0 \text{ vagy } (Ax)_i = \alpha \text{ teljesül minden } i = 1, \ldots n\text{-re.} \tag{4}$$

Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 1, x \geq 0\}$. Ez egy korlátos poliéder (politóp) lesz, melynek $\mathbf{0}$ egy csúcsa. Minden csúcsában legalább n egyenlőség kell teljesüljön; egy z csúcshoz mondjuk azt, hogy az i index **reprezentálva van**, ha $z_i = 0$ és $(Az)_i = 1$ közül legalább az egyik fennáll. Ha mindkettő teljesül, akkor i **duplán van reprezentálva**.



13. ábra

2.31. állítás. *Ha z olyan csúcs, amelynél minden $1 \leq i \leq n$ reprezentálva van, és $z \neq 0$, akkor $x = \frac{z}{\sum_i z_i}$ szimmetrikus Nash-egyensúly.*

Az állítás rögtön következik abból, hogy (4) teljesül x-re. Célunk tehát egyetlen, a $\mathbf{0}$-tól különböző olyan csúcsot találni, amelynél minden stratégia reprezentálva van. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy P **nem degenerált**. Ez azt jelenti, hogy minden csúcs pontosan n feltételt teljesít egyenlőséggel. (Pl. az oktéder degenerált, a dodekaéder nem az.) A feltételeket egy nagyon kicsit módosítva, pl. a mátrix minden eleméhez egy kicsi véletlen számot adva tetszőleges poliédert ilyenné tehetünk úgy, hogy a módosított probléma egy Nash-egyensúlya az eredetiben is Nash-egyensúly legyen.

P élei ekkor azok a halmazok, melyek $n-1$ feltételt teljesítenek egyenlőséggel. Minden élre két csúcs illeszkedik, ezeket szomszédosaknak nevezzük. Legyen F_z a z csúcsnál egyenlőséggel teljesülő feltételek halmaza. A z csúcsnak az $f \in F_z$ feltétel szerinti szomszédja a z' csúcs, ha $F_z \cap F_{z'} = F_z - f$.

Legyen most Z_0 azon csúcsok halmaza, melyeknél minden index reprezentálva van, Z pedig azoké, melyekre az első $n-1$ index reprezentálva van. Világos, hogy $\mathbf{0} \in Z_0 \subseteq Z$. Mivel a poliéder nem degenerált, a $Z - Z_0$-beli csúcsoknál pontosan egy index van duplán reprezentálva.

Legyen $z_0 = 0$, és vegyük z_0-nak az $x_n \geq 0$ feltétel szerinti z_1 szomszédját. Ha $z_1 \in Z_0$, akkor készen vagyunk; egyébként van egy egyértelmű duplán reprezentált i index. Az $(Ax)_i \leq 1$ feltétel szerinti szomszédja z_0; az $x_i \geq 0$ feltétel szerinti szomszédja viszont egy ettől különböző z_2.

Így tovább, ha az általános lépésben $z_t \in Z_0$, akkor befejezzük az eljárást. Ha $z_t \in Z - Z_0$, akkor van egy egyértelmű duplán reprezentált i index. Ekkor az $x_i \geq 0$ és $(Ax)_i \leq 1$ feltételek szerinti egyik szomszédja z_{t-1}, a másik pedig egy ettől különböző z_{t+1}. Azt állítjuk, hogy z_{t+1} különbözik az eddigi $z_0, \ldots, z_t$ csúcsoktól. Ebből következik, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget kell érjen, ami azt jelenti, hogy találunk egy $\mathbf{0}$-tól különböző Z_0-beli csúcsot.

Tegyük fel indirekten, hogy $z_{t+1} = z_j$, $h < t$ az első ismétlődés. Ekkor z_{t+1} a z_h-ban duplán reprezentált indexhez tartozó egyik feltétel szerinti szomszédja volna. Azonban z_{h-1} és z_{h+1} már két ilyen szomszéd volt (illetve ha $h = 0$, akkor z_1 volt az egyetlen ilyen szomszéd).

2.8. Korrelált egyensúly

A héja-galamb játékban három kevert Nash-egyensúly létezik: a két tiszta egyensúlyban ellentétes stratégiát választanak, a harmadik kevert Nash-egyensúlyban pedig mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választanak a két stratégia közt. A két tiszta egyensúlyban a galamb egyértelműen rosszabbul jár, ez tehát az egyik játékossal szemben igazságtalannak tekinthető. Nézzük a kevert egyensúlyt; ebben az egyes kimenetelek valószínűsége:

	Héja	Galamb
Héja	1/4	1/4
Galamb	1/4	1/4

Ekkor mindkettejük várható nyeresége $\frac{1}{4}(1+4+3) = 2$ lesz – az egyensúly igazságos ugyan, de mindketten lényegesen rosszabbul járnak, mintha ők lennének a tiszta stratégiaválasztásban a héják. Vegyük ezzel szemben a kimenetelek következő eloszlását:

	Héja	Galamb
Héja	0	1/2
Galamb	1/2	0

Ez nemcsak hogy nem felel meg Nash-egyensúlynak, de nincsenek is olyan kevert stratégiák, amelyek ezt az eloszlást indukálnák (egy σ kevert stratégiaválasztás által indukált q eloszlás az, amire $q(s) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i)$). Mégis, bizonyos értelemben racionális kimenetelnek tekinthető: tegyük fel, hogy egy független harmadik szereplő – nevezzük játékvezetőnek – e szerint az eloszlás szerint választja a két kimenetel egyikét, és azt javasolja a játékosoknak. A gyáva nyúl narratívában gondolkodva, ez egy közlekedési lámpának felel meg, amelyik az egyik irányban pirosat, a másikban zöldet mutat. A játékosokat nem kényszerítjük arra, hogy elfogadják a javaslatot. Ez számukra még racionálisnak tűnik: ha ugyanis tudjuk, hogy a másiknak épp az ellentétes viselkedés lett javasolva, és feltesszük, hogy ő elfogadja, akkor rosszabbul járunk, ha mi eltérünk a javaslattól. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 2.5, magasabb, mint a kevert Nash-egyensúly esetén volt.

A korrelált egyensúly fogalmát Aumann vezette be ehhez hasonló szituációk általános leírására. Tegyük fel, hogy adott a kimenetelek S halmazán egy $q(\mathbf{s})$ valószínűségi eloszlás: $\sum_{\mathbf{s}\in S} q(\mathbf{s}) = 1$. A játékvezető ezen eloszlás szerint választ egy $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ kimenetelt. Az i. játékosnak javaslatot tesz az s_i stratégia használatára (de nem árulja el neki a teljes $\mathbf{s}$-t, vagyis a többi játékosnak javasolt stratégiákat). Az összes játékos számára ismert azonban a q eloszlás.

q akkor van **korrelált egyensúlyban**, ha ezen információk alapján mindegyik i. játékosnak érdemes elfogadni a javaslatot. Annak ismeretében, hogy a számára javasolt stratégia s_i volt,

$$q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}) := \frac{q(s_i, \mathbf{t}_{-i})}{\sum_{\mathbf{w}_{-i}\in S_{-i}} q(s_i, \mathbf{w}_{-i})}$$

a feltételes valószínűsége annak, hogy a többiek számára a $\mathbf{t}_{-i} \in S_{-i}$ javaslat lett téve. Vagyis s_i-t választva a várható haszna

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, \mathbf{t}_{-i}) \cdot q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}).$$

Ez legalább olyan jó kell legyen, mint tetszőleges másik $z \in S_i$, azaz

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i} u_i) \cdot (s_i, \mathbf{t}_{-i}) \geq \sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}) \cdot u_i(z, \mathbf{t}_{-i}).$$

Átrendezve és $\sum_{\mathbf{w}_{-i}\in S_{-i}} q(s_i, \mathbf{w}_{-i})$-vel beszorozva azt kapjuk, hogy q pontosan akkor korrelált egyensúly, ha minden i játékosra, minden $s_i, z \in S_i$ stratégiáira

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} (u_i(s_i, \mathbf{t}_{-i}) - u_i(z, \mathbf{t}_{-i})) \cdot q(s_i, \mathbf{t}_{-i}) \geq 0. \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy ezek a feltételek, azzal együtt, hogy q valószínűségi eloszlás kell legyen, mind lineáris egyenlőtlenségek, tehát a korrelált egyensúlyok lineáris egyenlőtlenségekkel leírt poliédert alkotnak. Ezért hatékonyan tudunk korrelált egyensúlyt találni, sőt, különböző lineáris célfüggvényekre nézve legjobbat is, például olyat, aminél a játékosok várható nyereségének összege maximális. Ezt a módszert alkalmazva látható az alábbi tétel:

2.32. tétel. *Tetszőleges véges játékban a (bármilyen lineáris célfüggvény szerinti) legjobb korrelált egyensúly meghatározása lineáris programozás segítségével megtalálható.*

Példaként határozzuk meg a héja-galamb játékra a legjobb korrelált egyensúlyt abban az értelemben, hogy a játékosok várható nyereségének összege maximális legyen! A (5) egyenlőtlenségek a következők:

$$\begin{aligned}
(0-1)q(11) + (4-3)q(12) &\geq 0\\
(1-0)q(21) + (3-4)q(22) &\geq 0\\
(0-1)q(11) + (4-3)q(21) &\geq 0\\
(1-0)q(12) + (3-4)q(22) &\geq 0
\end{aligned}$$

Tudjuk továbbá, hogy a négy érték nemnegatív és összegük 1:

$$q(11) + q(12) + q(21) + q(22) = 1.$$

A várható nyereségek összege a

$$(0+0)q(11) + (4+1)q(12) + (1+4)q(21) + (3+3)q(22),$$

lineáris célfüggvény. Az optimális megoldás $q(12) = q(21) = q(22) = \frac{1}{3}$ lesz, vagyis:

	Héja	Galamb
Héja	0	1/3
Galamb	1/3	1/3

Ez annak felel meg, hogy a közlekedési lámpa az esetek harmadában pirosat mutat; mindkét játékos várható nyeresége $\frac{8}{3}$.

Legyen most $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta$ egy kevert stratégiaválasztás! Tekintsük a $q(s) = \Pi\sigma_i(s_i)$ eloszlást! Ekkor $q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}) = \Pi_{j \neq i}\sigma_j(t_j)$, vagyis a feltételes valószínűség független s_i választásától. Ezt használva, a (5) egyenlőtlenség épp azzal ekvivalens, hogy s_i legjobb tiszta válasz σ_{-i}-re. Mivel ennek minden i-re és minden olyan s_i-re teljesülnie kell, amelyre $\sigma_i(s_i) > 0$, ezért a 2.9. lemma alapján σ kevert Nash-egyensúly. Vagyis a korrelált egyensúly általánosítja a kevert Nash-egyensúly fogalmát, de mint a fenti példán láttuk, bővebb is lehet nála.

3. Mechanizmustervezés

A mechanizmustervezésben konkrét játékok elemzése helyett célunk azok megkonstruálása: valamilyen piaci vagy politikai szituációban szeretnénk igazságos elosztási vagy döntési eljárásokat létrehozni.

Egy egyszerű példa a pizzaszeletelés: egy többféle feltétes pizzát szeretne két ember igazságosan elosztani. A feltételeket illetően ízléseik különbözőek lehetnek. A közismert osztozkodási szabály szerint először az egyikük két részre osztja a pizzát, a másik pedig kiválasztja a két szelet közül az egyiket.

A preferenciák mindkettejük számára egy-egy mértéket (az *Analízisben* használt értelemben) határoznak meg a pizzán. Például lehet, hogy valakinek a zelleres feltét kétszer jobban ízlik, mint a brokkolis, ezért egy szelet a zelleres részből számára egy kétszer akkora brokkolissal egyenértékű, a másik játékosnál viszont éppen fordított a helyzet. A fenti osztozkodási szabály mindkettejük számára garantálja, hogy a saját mértékük szerint legalább a felét megkaphatják: az osztó a saját preferenciájának megfelelően két egyenlő részre vágva tudja ezt garantálni, a választó játékos pedig a saját mértékének megfelelően a nagyobbik (nem kisebbik) darabot választva.

Mi a helyzet több játékos esetén? Tegyük fel, hogy az n játékos mindegyikének van egy különböző mértéke a P pizzán, ezek $\mu_1, \dots, \mu_n$. Akkor definiáljuk igazságosnak a mechanizmust, ha mindegyik játékos számára garantálható, hogy a végén neki jutó A_i darabra $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(P)/n$, vagyis a saját mértéke szerint legalább az n-ed részt kapja, még akkor is, ha az összes többi játékos összefogna ellene. Feltesszük (az előbb már impliciten használt) oszthatósági tulajdonságot: ha egy játékos előtt tetszőleges $T \subseteq P$ darab fekszik, és $0 < \alpha < 1$ tetszőleges racionális szám, akkor fel tudja osztani T-t T_1 és T_2 részekre, hogy $\mu_i(T_1) = \alpha\mu_i(T)$, $\mu_i(T_2) = (1-\alpha)\mu_i(T)$.

Indukcióval definiálhatunk igazságos mechanizmust. Tegyük fel, hogy $n-1$ részre már tudunk igazságosan osztani. Osszuk hát így el az első $n-1$ játékos között. Ezután mindegyik játékos ossza fel n részre a saját darabját. Az n. játékos az összes többi játékos n darabja közül válasszon egyet-egyet.

3.1. állítás. *A fenti mechanizmus n játékos számára igazságos.*

Bizonyítás. Legyen $B_1, \dots, B_{n-1}$ az indukció szerint kapott darabolás. Először lássuk be, hogy az n. játékos számára igazságos. Mindegyik B_i n darabra van osztva, ezek közül a μ_n szerinti legnagyobb darabot választva mindegyiknek legalább az $\frac{1}{n}$-ed része jut, ami a teljes pizzának legalább az n-ed részét jelenti tehát. Az $i < n$ játékosnak az indukció szerint garantáltuk, hogy $\mu_i(B_i) \geq \mu_i(P)/(n-1)$. Ha ő a saját darabját μ_i szerint n egyenlő részre osztja, akkor ennek $\frac{n-1}{n}$-ed része megmarad, vagyis összesen legalább $\mu_i(P)/n$ mértékű darab jut. $\square$

A mechanizmustervezésben általában egy **közösségi döntést** keresünk: adott lehetséges kimenetelek egy halmaza (az előbbi esetben a pizza összes lehetséges darabolásai). Egy csoport minden tagjának vannak (csak számára ismert) preferenciái vagy értékelési függvénye az alternatívákon. Valamilyen meghatározott eljárás keretében saját preferenciáik alapján döntéseket hoznak. Célunk egy olyan eljárás tervezése, amely bizonyos szempontok szerint igazságosnak tekinthető. Egy fontos speciális eset a következő fejezetben tárgyalt szavazás.

3.1. Politikai választások

Amennyiben két lehetséges alternatíva közül kell választani, kézenfekvő döntési mechanizmus a **többségi szavazás**. Látható ráadásul, hogy ez az egyedüli igazán igazságosnak tekinthető módszer. Kérdés, hogy mi a helyzet, ha három lehetséges kimenetel közül kell dönteni? A többségi szavazás természetes általánosítása a listás szavazás: a lehetséges jelöltek közül mindenki egyet választhat, és a legtöbb szavazatot kapó jelölt nyeri a választást.

Tekintsük a következő szituációt. Három jelölt, a, b és c közül a szavazók 45%-ának preferenciasorrendje a, b, c, 30% preferenciasorrendje b, c, a, 25%-nak pedig c, b, a. A többségi szavazás alapján ekkor a fog nyerni a szavazatok 45%-ával. Vegyük azonban észre, hogy a szavazók 55%-a számára a valójában a három közül a legrosszabb választás: a többség tehát jobban örülne, ha b vagy c nyerne. Ha például a 25%-os csoport a saját kedvenc jelöltje, c helyett átszavazna b-re, akkor őt ki is tudnák hozni győztesnek. Ezt a jelenséget nevezzük **taktikai manipulálhatóságnak**. A probléma ezzel, hogy a szavazók valódi véleménye helyett „azt gondolom, hogy a többiek úgy gondolják, hogy én azt gondolom hogy ők azt gondolják stb.” típusú kezelhetetlen okoskodások eredményét kapjuk, amit például a közvéleménykutatások eredménye igen erősen torzíthat. (Hasonló jelenség, ha valaki azért nem szavaz a számára legszimpatikusabb pártra, mert fél hogy az nem éri el az 5 százalékos parlamenti küszöböt, és ezért az ő szavazata „kárba veszne”.)

A többségi szavazás javítását célozza a Borda-pontozás: legyen k jelöltünk. Minden szavazó sorrendbe állítja a jelölteket, az első helyezett k, a második $k-1$, a legutolsó pedig 1 pontot kap. A fenti preferenciák mellett, 100 szavazó esetén a 190, b 230, c pedig 180 pontot kapna, vagyis b jönne ki győztesnek.

3.2. feladat. *Készítsünk Borda-pontozás esetében példát taktikai manipulálhatóságra, vagyis mutassunk olyan esetet, amikor bizonyos szavazók a saját valós preferenciasorrendjeiktől eltérő módon szavazva maguk számára kedvezőbb eredményt tudnának kikényszeríteni.*

Itt és a következőkben $\prec$-t rendezésnek nevezzük egy A halmazon, ha **dichotóm** (vagyis minden $x, y \in A$-ra vagy $x \prec y$ és $y \prec x$ közül pontosan az egyik áll fenn), **irreflexív** (vagyis $x \prec x$ nem teljesül) és **tranzitív** (vagyis $x \prec y$ és $y \prec z$ esetén $x \prec z$). Feltesszük, hogy minden szavazó preferenciáit egy-egy rendezés adja meg a jelöltek halmazán.

A többségi szavazat egy másik, preferenciákra vonatkozó általánosítása az alábbi lenne. Minden szavazó megadja a saját preferenciasorrendjét. Az $x, y \in A$ jelöltek sorrendjét a közös döntésben aszerint határozzuk meg, hogy melyiküket részesítette a szavazók többsége előnyben a másikkal szemben. Condorcet márki 1785-ben adott példája rámutat arra, hogy ez a módszer nem működhet. Tegyük fel ugyanis, hogy három jelölt van: $A = \{a, b, c\}$. Legyen a szavazók száma is három, a következő preferenciákkal:

(i) $a \succ_1 b \succ_1 c$,

(i) $b \succ_2 c \succ_2 a$,

(i) $c \succ_3 a \succ_3 b$,

ahol $\prec_i$ az i. szavazó rendezése A-n. Többségi szavazást alkalmazva, a-t előbbre kell rangsoroljuk b-nél, hiszen a háromból ketten előbbre helyezték. Ugyanígy viszont b-t előbb kell tennünk c-nél, c-t pedig a-nál, tehát végül az $a \prec b \prec c \prec a$ ellentmondásos sorrendhez jutnánk.

A többségi szavazáson és a Borda-pontozáson kívül számos más választási rendszer is elképzelhető, mint pl. a kétfordulós választás, ahol a második fordulóba az első fordulóban legtöbb szavazatot elérő két jelölt jut tovább. Ennél a módszernél is kimutatható azonban a taktikai manipulálhatóság. A fejezet fő eredménye az lesz, hogy ez a jelenség általában véve kiküszöbölhetetlen.

Az Arrow-tétel

Megadunk egy formális modellt. Legyen A az alternatívák halmaza, és legyen L az A-n megadható összes lehetséges rendezés. Adott n szavazó, az i. szavazó preferenciáit az $\prec_i \in L$ rendezés írja le: $a \succ_i b$ hogyha előbbre rangsorolja a-t b-nél. Az $F : L^n \to L$ függvényt **közjóléti függvénynek** nevezzük: ez az n szavazó sorrendjéből alakít ki egy „konszenzusos” sorrendet. Az $f : L^n \to A$ függvény pedig **voksolási függvény**, ez a sorrendek alapján egyetlen jelöltet választ ki.

Az n szavazó által adott sorrendekből álló $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$-t egy **választási profilnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $a, b \in A$ lehetőségeket a π és $\pi' = (\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ profilok **azonosan rendezik**, ha minden i-re $a \prec_i b \Leftrightarrow a \prec'_i b$.

A közjóléti függvénnyel kapcsolatban természetes elvárásnak tekinthetőek az alábbi tulajdonságok.

(E) F **egyhangú**, ha tetszőleges $\prec \in L$-re $F(\prec, \prec, \dots, \prec) = \prec$. Vagyis ha mindenki ugyanazt a sorrendet választja, akkor ez legyen a konszenzus is.

(L) F **független a lényegtelen alternatíváktól**, ha tetszőleges $a, b \in A$ alternatíva közös sorrendje csak attól függ, hogy az egyes szavazóknál mi volt a és b sorrendje. Azaz ha a π és π' profilok azonosan rendezik a-t és b-t, akkor $a \prec b \Leftrightarrow a \prec' b$, ahol $\prec = F(\pi)$ és $\prec' = F(\pi)$.

(D) Az i. szavazót **diktátornak** nevezzük F-re nézve, ha mindig az ő sorrendje lesz a közös döntés, vagyis tetszőleges $\pi = (\prec_1, \ldots, \prec_n)$ sorrendekre $F(\pi) = \prec_i$. Ha van ilyen i, akkor F-et **diktatúrának** nevezzük, egyébként pedig **diktátor-mentesnek**.

Ha összesen két alternatíva van, akkor könnyen látható hogy a többségi szavazásra mindegyik feltétel teljesül. Arrow klasszikus lehetetlenségi eredménye azonban kimondja, hogy több alternatíva esetén nem lehet őket egyszerre kielégíteni.

3.3. tétel (Arrow, 1951). *Legalább három választási lehetőség* ($|A| \geq 3$) *esetén ha egy közjóléti függvény egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól, akkor diktatúra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól, vagyis rendelkezik az (E) és (L) tulajdonságokkal. Vegyük észre, hogy ezekből egyből következik az alábbi

(E') Ha valamely $a, b \in A$-ra $a \succ_i b$ minden i-re és $\prec = F(\prec_1, \prec_2, \ldots, \prec_n)$, akkor $a \succ b$.

3.4. állítás. *Ha valamely b alternatíva $\pi = (\prec_1, \ldots, \prec_n)$-re minden $\prec_i$ sorrendben vagy a legelső vagy a legutolsó, akkor a $\prec = F(\pi)$ sorrendet tekintve is vagy a legelső, vagy a legutolsó.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy $a \succ b \succ c$ valamely $a, c \in A$-ra. Legyen π' az a választási profil, amit úgy kapunk π-ből, hogy mindegyik sorrendben a-t közvetlenül c mögé helyezzük. Mivel minden $\prec_i$-re b a legelső vagy legutolsó, ezért π és π' azonosan rendezi a-t és b-t, illetve b-t és c-t. Ezért (L) alapján $a \succ b$ és $b \succ c$. Ugyanakkor $c \succ a$ is teljesül (E') miatt, ellentmondás. $\diamond$

Vegyünk most egy tetszőleges π profilt és egy $b \in A$ jelöltet. Ebből hozzuk létre a π^j, $j = 0, \ldots, n$ profilokat az alábbi módon. π^j-ben $i \leq j$ esetén b-t $\prec_i$-ben a legelső helyre hozzuk előre, $i > j$ esetén pedig a legutolsóra. (E') miatt az $F(\pi^0)$ sorrendben b a legutolsó, $F(\pi^n)$-ben pedig a legelső lesz. Az előző állítás miatt b minden $F(\pi^j)$-ben vagy első, vagy utolsó. Legyen ℓ a legkisebb olyan index, amire b a legelső $F(\pi^\ell)$-ban. Vagyis amikor az ℓ. szavazó az utolsó helyről az elsőre viszi előre b-t, akkor a közös döntésben is ugyanez játszódik le. Belátjuk, hogy ő diktátor.

3.5. állítás. *Tetszőleges $\pi' = (\prec'_1, \ldots, \prec'_n)$ profilra és $a, c \neq b$-re az $F(\pi')$ közös döntésben a és c sorrendje ugyanaz, mint $\prec'_\ell$-ben.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \succ'_\ell c$. Módosítsuk π'-t π''-re úgy, hogy $i < \ell$-re b-t a legutolsó, $i > \ell$-re a legelső helyre tesszük $\prec'_i$-ben, $\prec'_\ell$-ben pedig helyezzük b-t közvetlenül a mögé (vagyis $a \succ''_\ell b \succ''_\ell c$). Legyen $\prec'' = F(\pi'')$. Vegyük észre, hogy a és b ugyanúgy van rendezve π''-ben mint $\pi^{\ell-1}$-ben, ezért (L) miatt $a \succ'' b$, mivel b a legutolsó volt $F(\pi^{\ell-1})$-ben. Hasonlóan, b és c ugyanúgy van rendezve π''-ben mint π^ℓ-ben, ezért $b \succ'' c$. A tranzitivitás miatt $a \succ'' c$. Mivel a és c ugyanúgy van rendezve π'-ben és π''-ben, ezért ismét (L) miatt $a \succ' c$. $\diamond$

3.6. állítás. *Tetszőleges $\pi' = (\prec'_1, \ldots, \prec'_n)$ profilra és $a \neq b$-re a közös döntésben a és b sorrendje ugyanaz, mint $\prec'_\ell$-ben.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges $d \neq a, b$-t. Ugyanazzal a konstrukcióval (b helyett d-vel) meghatározhatunk egy $\hat{\ell}$ indexet, amire igaz az, hogy minden π'-re a és b sorrendje $F(\pi')$-ben ugyanaz, mint $\prec'_{\hat{\ell}}$-nél. Azt kell csupán belátnunk, hogy $\hat{\ell} = \ell$. Tegyük fel, hogy $\hat{\ell} \neq \ell$, és tekintsük a $\pi^{\ell-1}$ és π^ℓ sorrendeket. Ezekben a és b sorrendje a $\hat{\ell}$. választónál ugyanaz, $F(\pi^{\ell-1})$-ben és $F(\pi^\ell)$-ben viszont különböző, ami ellentmondás. $\diamond$

Belátuk tehát, hogy az ℓ. választó diktátor. Világos az is, hogy nem lehet két különböző diktátor. $\square$

A Gibbard-Satterthwaite tétel

Eddig közjóléti függvényeket vizsgáltunk; most hasonló lehetetlenségi eredményt mutatunk voksolási függvényekre is. Legyen f egy voksolási függvény. Azt mondjuk, hogy f **taktikailag manipulálható**, ha van olyan $1 \leq i \leq n$, $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profil és $\prec'_i \in L$ rendezés, hogy $\pi' = (\prec_1, \dots, \prec'_i, \dots \prec_n)$-re $a \prec_i a'$, ahol $a = f(\pi)$ és $a' = f(\pi')$. Ez azt jelenti, hogy az i. szavazó a győztes a-val szemben előnyben részesíti az a'-t, és el tudja érni a' megválasztását úgy, hogy a (valós) $\prec_i$ preferenciái helyett egy másik $\prec'_i$-t közöl. Azt mondjuk, hogy f **taktikázásbiztos**, ha nem manipulálható taktikailag.

Egy hasonló – valójában azonos – fogalom: az f voksolási függvény **monoton**, ha – az előző definíció jelöléseit használva – $a \neq a'$-ből következik hogy $a' \prec_i a$ és $a \prec'_i a'$. Vagyis ha az i. szavazó szavazatával módosítani tudja a-ról a'-re a győztest, akkor ehhez saját sorrendjében az a' és a közti rendezésnek meg kell fordulnia.

3.7. állítás. *Az f voksfüggvény pontosan akkor monoton, ha taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha monoton, akkor taktikázásbiztos. Megfordítva, tegyük fel, hogy nem monoton; belátjuk, hogy manipulálható. Ha nem monoton, akkor $a = f(\pi)$ és $a' = f(\pi')$, $a \neq a'$ esetén vagy $a' \succ_i a$ vagy $a \succ'_i a'$. Az első esetben manipulálható az eredeti jelölésekkel. A második esetben fordítva, az i. választó úgy tud manipulálni, ha $\succ'_i$-ről változtatja $\succ_i$-re a szavazatát. □

Egy f voksfüggvényre az i. szavazót **diktátornak** nevezzük, ha tetszőleges $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profil esetén $f(\pi)$ az i. sorrend szerinti legelső jelölt lesz. f **diktatúra**, ha van diktátor.

3.8. tétel (Gibbard 1973, Satterthwaite 1975). *Ha f taktikázásbiztos szürjektív voksfüggvény és $|A| \geq 3$, akkor f diktatúra.*

Ha $|A| = 2$, akkor a többségi szavazás taktikázásbiztos. Szintén szükséges feltétel, hogy f szürjektív (vagyis mindegyik alternatíva szerepel a lehetséges győztesek közt): az is taktikázásbiztos ugyanis, hogy egy rögzített $a \in A$-ra $f(\pi) = a$ minden π esetén. A tételt a 3.3. tételre fogjuk visszavezetni.

Bevezetünk egy új jelölést: egy $S \subset A$ halmazra és $\prec \in L$ rendezésre legyen $\prec^S$ az a rendezés, hogy S elemeit előre hozzuk. Vagyis $a, b \in S$ illetve $a, b \notin S$ esetekben $a \prec^S b \Leftrightarrow a \prec b$, ha pedig $a \in S$, $b \notin S$, akkor $a \succ b$. Egy $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profilra legyen $\pi^S = (\prec^S_1, \dots, \prec^S_n)$.

Az f voksfüggvény segítségével definiálunk egy F közjóléti függvényt. A π választási profilra $F(\pi) = \prec$-et a következő módon definiáljuk: $a \prec b$ pontosan akkor, ha $f(\pi^{\{a,b\}}) = b$.

A 3.8. tétel bizonyítása az alábbi két lemmából következik:

3.9. lemma. *Ha f taktikázásbiztos szürjektív voksfüggvény, akkor F egy közjóléti függvény.*

Bizonyítás. Szükségünk lesz az alábbi állításra.

3.10. állítás. *Tetszőleges $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profilra $f(\pi^S) \in S$.*

Bizonyítás. Legyen $a \in S$ tetszőleges. Mivel f szürjektív, ezért létezik olyan $\pi' = (\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ választási profil, amelyre $f(\pi') = a$. Cseréljük ki első lépésben $\prec'_1$-et $\prec^S_1$-re, utána $\prec'_2$-t $\prec^S_2$-re, stb. Azt állítjuk, hogy mindegyik lépésben $f(\pi') \in S$, amiből következik az állítás, hiszen végül π^S-hez jutunk.

Indirekten tegyük fel, hogy amikor $\prec'_i$-t $\prec^S_i$-re változtatjuk, akkor $f(\pi') = b \notin S$-re változik, és i a legkisebb ilyen index. Ez azonban ellentmond a monotonicitásnak, hiszen $b \prec^S_i a$. ◇

Azt kell belátnunk, hogy minden $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$-re az f-ből definiált $\prec = F(\pi)$ egy rendezést ad, vagyis dichotóm és tranzitív. Az dichotómia következik abból, hogy $f(\pi^{\{a,b\}}) \in \{a, b\}$. A tranzitivitáshoz tegyük fel indirekten, hogy $a \prec b \prec c \prec a$; legyen $S = \{a, b, c\}$. Mivel $f(\pi^S) \in S$, a szimmetria miatt feltehetjük hogy $F(\pi^S) = a$. Azt állítjuk, hogy ekkor $a \succ b$, ami ellentmondást ad. Valóban, a π^S választási profil elemeit egyenként cseréljük le $\pi^{\{a,b\}}$ elemeire. A montonicitásból ismét következik, hogy minden egyes csere után f értéke a marad. □

3.11. lemma. *Ha f diktátormentes taktikázásbiztos szürjektív voksfüggvény, akkor F egyhangú, a lényegtelen alternatíváktól független és diktátormentes közjóléti függvény.*

Bizonyítás. Az egyhangúsághoz legyen $\pi = (\prec, \ldots, \prec)$. Tegyük fel, hogy $a \prec b$; azt kell belátni, hogy $f(\pi^{\{a,b\}}) = b$. Ez következik abból, hogy $\pi^{\{a,b\}} = (\pi^{\{a,b\}})^{\{a\}}$, és a 3.10. állítás alapján $f(\pi^{\{a,b\}})^{\{a\}} = a$.

(L)-hez legyen $a, b \in A$, $\pi = (\prec_1, \ldots, \prec_n)$ és $\pi' = (\prec'_1, \ldots, \prec'_n)$ olyan, hogy $a \prec_i b \Leftrightarrow a \prec'_i b$. Azt kell igazolni, hogy $f(\pi^{\{a,b\}}) = f(\pi'^{\{a,b\}})$. Ismét egyenként változtassuk meg a $\prec_i^{\{a,b\}}$ preferenciákat $\prec_i'^{\{a,b\}}$-re, és használjuk a monotonicitást.

Végül, ha az i. szavazó diktátor lenne F-re nézve, akkor könnyen láthatóan f-re nézve is az volna. □

Ezzel a 3.8. tétel bizonyítása befejeződött, hiszan a 3.3. tétel éppen azt mondja ki, hogy $|A| \geq 3$ esetén nem létezhet ilyen közjóléti függvény.

3.2. Pénzalapú mechanizmustervezés

Az előző fejezetben a játékosok (választók) a különböző alternatívák közt egy sorrendet állapíthattak meg. Ez azonban nem tudja kifejezni azt, hogy „mennyivel” részesítik inkább előnyben egyik vagy másik lehetőséget; vagy esetleg mindegy nekik, melyik valósul meg. Következő modellünkben nem sorrend fog szerepelni, hanem minden lehetőség megvalósulása valamilyen pénzben kifejezhető hasznot fog jelenteni. Kezdjük egy példával, amiben egy aukció lebonyolítása a feladat.

Vickrey-árverések

Egy értékes tárgyat szeretnénk elárverezni. n érdeklődő van, ezek közül pontosan az egyik kaphatja meg. Mindenki egyidejűleg, lezárt borítékban tehet árajánlatot, ezek alapján döntjük el, kinek és mennyiért adjuk oda. Az i. játékos számára $w_i \in \mathbb{R}$ forintot ér; ha ő kapja meg t forintért, akkor a haszna $w_i - t$ (ami negatív is lehet); ha valaki más kapja, akkor nulla a haszna. A w_i értéket csak az i. játékos ismeri; tehát a játék nem is teljes információs. Vegyük észre, hogy ez a játék ráadásul nem is véges, hiszen $S_i = \mathbb{R}$ mindegyik játékosnál.

Két árverési mechanizmust vizsgálunk; mindkettőben a legtöbbet ígérő játékos kapja meg a tárgyat. (Ha több ilyen van, akkor pl. az ABC-ben utolsó nyer.) A **legmagasabb áras** változatban annyit kell fizetnie, amennyit licitált; a **második áras** vagy más néven **Vickrey-**árverésben pedig a második legnagyobb licit értékét kell kifizetnie.

Minden játékos stratégiája a licit értékével jellemezhető, azaz $S_i = \mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{Z}$, ha csak egész értéket lehet mondani). Ha $t > w_i$, akkor a w_i licit mindkét esetben dominálja a t licitet. A legmagasabb áras változatban érdemes lehet w_i-nél kisebb számot mondani, hiszen ha mi nyerünk, akkor az a cél, hogy minél kevesebbel mondjunk többet, mint a második legjobb licit. Mivel azonban nem ismerjük a többi licitet, csak tippelgetni tudunk, és lehet, hogy véletlen alámegyünk a másodiknak, így mégsem mi nyerünk. A következő állítás azt mutatja, hogy a második áras változatban a valós w_i értéket érdemes licitálni, függetlenül a többiek értékeiről alkotott elképzeléseinktől.

3.12. állítás. *A második áras játékban w_i az i. játékos egyértelmű domináns stratégiája.*

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy w_i dominál tetszőleges $t > w_i$ licitet. Tekintsünk most egy $t < w_i$ licitet. Tegyük fel, hogy a többi játékos licitjei közül z a legnagyobb érték. Ha $z > w_i$, akkor úgysem lett volna esélyünk nyerni, hiszen van, akinek w_i-nél többet ér a tárgy. Ha $w_i \geq z \geq t$, akkor w_i-t licitálva megszerezhettük volna $w_i - z$ nyereséggel, így pedig nem kaptuk meg. Ha $t > z$, akkor ugyanúgy $w_i - z$ lesz a nyereségünk, mintha w_i-t licitáltunk volna. Összefoglalva: z értékétől függetlenül mindig legalább annyi lenne a nyereségünk w_i-t licitálva, mint t-t, és van olyan szituáció, amikor kifejezetten jobban járunk. Vagyis w_i valóban domináns stratégia. □

Az általános modellben az i. játékosnak adott egy $v_i : A \to \mathbb{R}$ **értékelési függvénye**, ami azt fejezi ki, hogy az i. lehetőség megvalósulása mennyi hasznot (vagy kárt) hoz az illetőnek. Megengedjük továbbá, hogy a mechanizmus valamennyi pénzt kérjen a játékosoktól (vagy adjon nekik). A játékos haszna az értékelési függvényének és a tőle beszedett pénznek a különbsége lesz. A fenti Vickrey-árverésnél az alternatívák A halmaza azonos a játékosok halmazával, mivel egy kimenetel annak felel meg, hogy ki kapja meg a tárgyat. Ha $a \neq i$, akkor $v_i(a) = 0$, ha pedig $a = i$, akkor $v_i(i) = w_i$ egy rögzített $w_i > 0$ értékre.

Legyen S_i az i. játékos lehetséges v_i értékelési függvényeinek halmaza, és legyen $S = S_1 \times S_2 \times \times \ldots \times S_n$. **Mechanizmus** alatt egy $\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$ függvény $(n+1)$-est értünk, ahol $f : S \to A$ egy értékelési függvény, $p_i : S \to \mathbb{R}$ pedig az i. játékos által kifizetett összeg. Tegyük fel, hogy az i játékos *valódi* értékelési függvénye $\hat{v}_i \in S_i$. Ekkor $s \in S$ esetén az i. játékos nyeresége

$$u_i(s) = \hat{v}_i(f(s)) - p_i(s).$$

Rögzített $\mathcal{M}$ mechanizmus tehát egy n szereplős játékot definiál. A stratégiák az értékelési függvények: minden játékos nyilatkozik a saját értékelési függvényéről, és a saját, valamint a többiek függvényétől függő nyereségben részesül. A valódi $\hat{v}_i$ értékelési függvényét csak ő tudja; az általa mondott $v_i \in S_i$ értékelési függvény ettől különbözhet, a nyereségében azonban $\hat{v}_i$ jelenik meg.

A Vickrey-árverésben $S_i = \mathbb{R}_+$ minden i-re, mivel minden játékos stratégiáját egy s_i pozitív számmal, a licitjével tudjuk egyértelműen leírni. Az $f(s) = a$ arra az a. játékosra, aki a legnagyobb s_a értéket mondja. $p_i(s) = 0$ ha $i \neq a$, $p_a(s)$ pedig a második legnagyobb licit ára. (Több azonos legnagyobb licit esetén tetszőlegesen, pl. egy előre rögzített sorrend szerint választunk győztest; a nyeresége viszont 0 lesz, mivel a második legnagyobb licit is ugyanannyi, mint az övé.)

A 3.12. állításban láttuk, hogy az i. játékos egyértelmű domináns stratégiája w_i. Ezt általánosítva, egy $\mathcal{M}$ mechanizmus **taktikázásbiztos**, hogyha minden játékosnak a valódi értékelési függvénye domináns stratégiája. Képlettel felírva: $u_i(\hat{v}_i, \mathbf{v}_{-i}) \geq u_i(\mathbf{v})$, a többi játékos bármely v_j $(j \neq i)$ (mondott) értékelési függvényére (itt is $\mathbf{v}_{-i}$ a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, dots, v_n$ vektort jelöli).

Ezt a jelölést kissé megváltoztatva, ekvivalensen a következő formában írhatjuk fel. Legyen $\mathbf{v} = = (v_1, \ldots, v_n) \in S$, és valamely i-re $v'_i \in S_i$ (most v_i az i valódi értékelési függvénye, $j \neq i$-re v_j pedig a j által mondott). Legyen $a = f(v_i, \mathbf{v_{-i}})$ és $a' = f(v'_i, \mathbf{v_{-i}})$. Ekkor

$$v_i(a) - p_i(v_i, \mathbf{v_{-i}}) \geq v_i(a') - p_i(v'_i, \mathbf{v_{-i}}). \tag{6}$$

A definíció azt fejezi ki, hogy függetlenül attól, hogy egy játékos mit tud, sejt vagy spekulál a többi játékos értékelési függvényéről, neki mindig az a legjobb választása, hogy elárulja a saját valódi függvényét.

Vickrey-Clarke-Groves mechanizmusok

Az előző fejezet lehetetlenségi eredményeivel ellentétesen, megadjuk taktikázásbiztos mechanizmusok egy általános osztályát.

3.13. definíció. *$\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$-t* **Vickrey-Clarke-Groves (VCG) mechanizmusnak** *nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak.*

- *$f(v_1, \ldots, v_n) \in argmax_{a \in A} \sum_i v_i(a)$, vagyis olyan alternatívát választunk, amely maximalizálja a játékosok összértékét.*
- *Legyenek $h_1, \ldots, h_n$ rögzített függvények, úgy hogy $h_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$ (vagyis h_i nem függ v_i-től). Ekkor minden $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in S$-re*

$$p_i(\mathbf{v}) = h_i(\mathbf{v_{-i}}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(\mathbf{v})).$$

3.14. tétel (Vickrey, Clarke, Groves, 1973). *Minden VCG-mechanizmus taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy (6) teljesül; használjuk az ottani $v_i, v'_i, \mathbf{v_{-i}}, a$ és a' jelöléseket. A baloldal értéke $\sum_j v_j(a) - h_i(\mathbf{v_{-i}})$, a jobboldal pedig $\sum_j v_j(a') - h_i(\mathbf{v_{-i}})$. A definíció első része miatt $\sum_j v_j(a) \geq \geq \sum_j v_j(a')$. □

Tegyük most fel, hogy a játékban minden hasznosság nemnegatív: $v_i \geq 0$. Azt mondjuk, hogy a játék **veszteségmentes**, ha a valódi értékelési függvényt bevalló játékosoknak sosem kell többet fizetni a hasznosságuknál, vagyis $p_i(\mathbf{v}) \leq v_i(f(\mathbf{v}))$ mindig fennáll. További természetes kívánalom a **szubvenciómentesség**, hogy a mechanizmus senkinek se fizessen pénzt, azaz $p_i \geq 0$.

A **Clarke-szabály** nemnegatív hasznosságok esetén a következő h_i függvényt definiálja. Legyen

$$h(\mathbf{v_{-i}}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b), \tag{7}$$

ami azt fejezi ki, hogy mennyi az i. játékos kihagyásával elérhető legnagyobb hasznosság. A definíciókból azonnal látható:

3.15. tétel. *Nemnegatív hasznosságok esetén a Clarke-szabállyal definiált VCG-mechanizmus veszteség- és szubvenciómentes.*

A 3.2. fejezetben látott *Vickrey-árverés* éppen egy ilyen típusú mechanizmus. Ekkor

$$A = \{\text{az } i. \text{ játékos nyer} \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

A VCG-mechanizmus definíciójával összhangban, az az a játékos nyer, aki a legtöbbet ígéri, ugyanis $a \in A$-ra $\sum v_i(a) = v_a(a) = w_a$.

Vegyük észre, hogy ha $i \neq a$, akkor $h_i(\mathbf{v_{-i}}) = \sum_{j \neq i} f(a) = w_a$, vagyis $p_i(\mathbf{v}) = 0$ – aki nem nyert, annak nem is kell fizetnie. Ha pedig $i = a$, akkor $\sum_{j \neq a} f(a) = 0$, tehát $p_a(\mathbf{v_{-a}}) = h_a(\mathbf{v_{-a}})$, és ez éppen a második legnagyobb w_j értékkel lesz egyenlő.

3.16. feladat. *Tegyük fel, hogy nem egy, hanem k egyforma tárgyat szeretnénk árverezni. Mindenki legfeljebb egyet szeretne megszerezni. Bizonyítsuk be, hogy a Clarke-szabállyal a VCG mechanizmus a k legnagyobb árat ígérő játékosnak ad egy-egy példányt, és mindannyiuknak a* $k + 1$*. legnagyobb árat kell kifizetni!*

A Clarke-szabálynál használt $v_i \geq 0$ feltevés sok esetben nem áll fenn. Ilyen esetekben is használhatjuk azonban a (7) definíciót.

A **fordított árverés** feladatban egy szolgáltatást szeretne megvásárolni valaki. n szolgáltató tesz árajánlatot, ezek közül választ egyet. Az i. szolgáltató költsége w_i; ha t áron bízzák meg a szolgáltatás elvégzésével, akkor a haszna $t - w_i$, ha pedig nem őt bízzák meg, akkor 0. A Clarke-szabály által adott mechanizmusban a legolcsóbb árajánlatot kell választanunk, és ennek az ajánlattevőnek a második legkisebb árat kell kifizetni.

A **kétoldalú keresekedelemben** két játékos vesz részt, a vevő és az eladó. Az eladó által felkínált tárgy számára b, a vevő számára a összeget ér. A játék két lehetséges kimenetele az, hogy kötnek (k), vagy pedig nem kötnek üzletet (ℓ). Üzletkötés esetén tehát a vevő nyeresége $v_1(k) = a$, az eladóé $v_2(k) = -b$. Elvárjuk azt is, hogy ha nem kötnek üzletet, akkor nincs nyereségük vagy veszteségük: $v_1(\ell) = v_2(\ell) = 0$, és nem is kell egyiküknek sem fizetni. VCG-mechanizmusban akkor kell az üzletkötést választani, ha $a > b$. Abból a feltételből, hogy az üzlet meg nem kötése esetén nincsen kifizetés, következik, hogy a h_1 és h_2 függvények azonosan nullák. Vagyis az üzlet megkötése esetén az eladónak a-t kell kapnia, a vevőnek pedig b-t fizetnie. Az egyetlen VCG mechanizmusban tehát valahonnan kívülről $a - b$ összeggel támogatni kell a tranzakciót, ami irreálissá teszi az alkalmazhatóságot ebben a szituációban.

Egy másik példa, ahol külső támogatásra van szükség a **közösségi építkezés** esete. Tegyük fel, hogy egy $n - 1$ lakosú város szeretne belefogni egy vállalkozásba, például egy metró vagy egy iskola megépítése. Ennek költsége C, és az i. lakos számára a hasznossága v_i. Negatív v_i azt jelenti, hogy az illető számára kárt okoz a létesítmény. Vegyünk hozzá egy fiktív n. játékost, aki a közösséget jelképezi, és haszna $-C$ ha építkeznek, egyébként 0. A VCG mechanizmusban akkor választják az építkezést, ha $\sum_{i=1}^{n-1} v_i > C$. A Clarke-szabályt alkalmazva építkezés esetén az i. játékosnak akkor kell fizetnie, ha $v_i > 0$, és $\sum_{j \neq i} v_i < C$, vagyis az ő hasznát figyelmen kívül hagyva már nem érné meg építkezni. Ekkor $p_i = C - \sum_{j \neq i} v_i$-t kell fizetnie. Hasonlóan, ha az építkezés ellen döntenek, akkor az i. játékosnak $v_i < 0$ és $\sum_{j \neq i} v_i > C$ esetén kell fizetnie, vagyis ha az ő szavazatával hiúsult meg az építkezés; büntetése $p_i = \sum_{j \neq i} v_i - C$. Könnyen elképzelhető olyan szituáció tehát, amikor egy ember véleménye miatt sem kell módosítani a döntést; ekkor a mechanizmus szerint senkitől nem szedhetünk pénzt.

3.3. Újraelosztási feladat

Tegyük fel, hogy egy közösség minden tagja rendelkezik valamilyen vagyontárggyal, például egy házzal. Természetesen nem mindenki elégedett a sajátjával, és valaki másénak jobban örülne. Preferenciáik azonban különbözhetnek: elképzelhető például, hogy két ember elégedettebbnek érezné magát, ha házat cserélnének. Tegyük fel, hogy mind az n embernek az összes n házon (köztük a sajátján), adott egy teljes rendezése: $j \succ_i k$, ha az i. ember jobban szeretné a j. ember házát, mint a k-adikét. Egy elosztás egy olyan $i \mapsto s_i$ hozzárendelés, amelyre az s_i számok az $N = \{1, \dots, n\}$ halmaz egy permutációját alkotják. Az összes permutációk halmazát A-val jelöljük, az összes preferenciák halmazát P-vel ($|P| = |A| = n!$, a két halmaz valójában ugyanaz). Elosztási mechanizmus alatt egy $f : P^n \to A$ leképezést értünk, amely a bemenetként kapott n preferenciasorrendből megad egy elosztást. Feladatunk a házak egy olyan újraelosztásának megszervezése, amit mindenki méltányosnak ítélhet (ezt definiálni fogjuk alább).

Szorosan ide kapcsolódó, gyakorlatban is fontos feladat a vesecsere probléma. Egyes betegeknek veseátültetésre van szükségük. Szerencsés esetben családi-baráti körben tudnak olyan donort találni, aki felajánlja számukra egyik veséjét. Gyakran viszont ez a vese nem kompatibilis a beteg szervezetével; különböző donorvesék különböző fokon lehetnek megfelelőek. A donorszervek piaci kereskedelme illegális, viszont másik donorszervre való csere megengedett: ha két páciens részére felajánlottak egy-egy vesét, amely számukra nem alkalmas ugyan, de a másik részére megfelelő lenne, akkor mindkettejük hasznára kicserélhetik ezeket a veséket. Lehetséges azonban nagyobb körök mentén is cseréket végrehajtani. Több országban, pl. az Egyesült Államokban létezik országos vesedonor adatbázis, amelyben az itt bemutatotthoz hasonló algoritmussal juttatnak minél több beteget új veséhez. A fenti házcsere modellhez képest fontos különbség, hogy nincs teljes preferenciasorrend: bizonyos vesék egyáltalán nem alkalmasak egyes betegeknek.

A mechanizmus „méltányossága” alatt a taktikázásbiztosság mellett erősebb elvárásunk is lesz. Mielőtt erre rátérnénk, vegyük észre, hogy a 3.8. tétel nem alkalmazható erre a problémára, mivel a preferenciák nem a kimenetek halmazán adottak. Egy játékos szempontjából ugyanolyan értékű két elosztás, amiben ő ugyanazt a házat kapja, függetlenül attól, hogy a többiek közül kinek mi jutott. A 3.8. tételhez azonban arra volt szükség, hogy minden játékosnak az összes kimenetelen legyen egy szigorú preferenciarendezése.

Az eddigi mechanizmusoktól alapvetően különbözik a szituáció abban, hogy a tulajdonosok szabadon rendelkezhetnek a házukkal, mi csak javaslatot tehetünk nekik, amit jogukban áll elfogadni vagy nem elfogadni. Ha valaki a sajátját tartja a legjobbnak, akkor bármit is kínáljunk helyette, nem fogja elfogadni. Ezt általánosítja a következő fogalom. Egy $S \subseteq N$ halmazra legyen $A(S)$ azon elosztások halmaza, amelyben minden S-beli ember egy S-beli házát kapja meg. Vagyis $A(S) = \{z \in A : z_i \in \in S \; \forall i \in S\}$. Egy S halmazt az $s \in A$ elosztásra nézve **blokkoló koalíciónak** nevezünk, hogyha létezik olyan $z \in A(S)$, hogy tetszőleges $i \in S$-re $z_i \succeq_i s_i$, és legalább egyik helyen $z_i \succ_i s_i$. Ez azt jelenti, hogy ha az S halmaz kilépne az elosztásból, akkor tudnának maguk közt egy olyan másikat csinálni, hogy mindenki legalább olyan jól járna, legalább egy valaki pedig szigorúan jobban. Azon elosztások halmazát, amelyekre nem létezik blokkoló koalíció, az újraelosztási feladat **magjának** nevezzük.

A **felső körcsere algoritmus** egy ilyen elosztást fog találni. Vegyük az N ponthalmazon azt a G_1 irányított gráfot, amelyben az i. pontból a j.-be akkor megy él, ha az i. játékos preferenciasorrendjében a legjobb ház a j. (Megengedünk hurokéleket is.) Ebben a gráfban minden pont kifoka pontosan 1, ezért biztosan tartalmaz legalább egy irányított kört (a hurkokat is irányított körnek tekintjük). Látható tovább, hogy ezek a körök diszjunktak. Legyen N_1 a körök ponthalmaza. Minden $i \in N_1$ ember kapja meg az őt tartalmazó körben a ki-szomszédjának a házát; az N_1-beliek tehát mind a nekik leginkább tetsző házat kapják meg.

Töröljük az N_1 ponthalmazt; az $N - N_1$ ponthalmazon húzzuk be az ij irányított élt, ha az i. játékos számára az $N - N_1$-beli házak közül a j. a legjobb. Legyen G_2 az így kapott gráf. Az előzőhöz hasonlóan, legyen N_2 ebben a gráfban az irányított körök halmaza, és kapja meg minden $i \in N_2$ játékos az őt tartalmazó körben a ki-szomszéd házát. Így tovább, a k. lépésben tekintsük az $N - \cup \cup_{j<k} N_j$ ponthalmazon a legjobb házak által meghatározott G_k gráfot, és definiáljuk az N_k halmazt. Így végül N-t felosztjuk nemüres halmazok uniójára, és minden játékoshoz hozzárendelünk egy házat.

3.17. tétel (Shapley, Scarf, Gale, 1974). *Az újraelosztási feladat magja pontosan egy elosztásból áll, abból, amelyiket a felső körcsere algoritmus megtalálja.*

Bizonyítás. Legyen s az algoritmus által adott elosztás. Először belátjuk, hogy s-en kívül más s' elosztás nem lehet a magban. s-ben az N_1-beli játékosok mind a számukra legjobb házat kapták. Ha tehát s'-ben egy $i \in N_1$ játékos másik házat kapna, akkor N_1 blokkoló koalíció lenne s'-re nézve. Vagyis $s'|_{N_1} = s|_{N_1}$. N_2-ben minden játékos a legjobb olyan házat kapja, ami nem egy N_1-beli játékosé volt. Tehát – tudva, hogy s' az N_1-beli házakat N_1-ben osztja szét – ugyanilyen érveléssel látszik, hogy $s'|_{N_2} = s|_{N_2}$. Ezt az érvelést folytatva láthatjuk, hogy s az egyetlen lehetséges elosztás a magban.

Be kell még látnunk, hogy s tényleg a magban van, vagyis nem létezik s-re nézve blokkoló koalíció. Indirekten, legyen S egy minimális blokkoló koalíció, $z \in A(S)$ egy blokkoló elosztás. Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $S \cap N_k \neq \emptyset$. Legyen $C \subseteq N_k$ az egyik olyan N_k-beli kör, amire $C \cap S \neq = \emptyset$. Ha $C - S \neq \emptyset$, akkor léteznek olyan $i \in C \cap S$, $j \in C - S$ elemek, amelyekre ij egy él G_k-ban. Ekkor $s(i) \succ_i z(i)$, hiszen $s(i) = j$ és $j \succ_i j'$ tetszőleges $j' \in S$-re. Ez ellentmond annak, hogy S (és z) blokkolja s-et.

Tehát $C \subseteq S$. Ugyanígy látszik azonban, hogy minden $i \in C$-re $s(i) = z(i)$, vagyis ekkor $S - C$-nak is blokkoló koalíciónak kell lenni, ellentmondva S minimális választásának. □

A szokásos módon **taktikázásbiztosnak** nevezünk egy f elosztási mechanizmust, hogyha nem léteznek olyan $\pi = (\prec_1, \ldots, \prec_n) \in P^n$ preferenciák, hogy az i. játékos egy $\prec'_i$ preferenciájára és $\pi' = (\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n)$, $s = f(\pi)$ és $s' = f(\pi')$ esetén $s' \succ_i s$. Vagyis az i. játékos nem tudja úgy megváltoztatni a preferenciáját, hogy az ezáltal módosított döntés értelmében jobb házhoz jusson.

3.18. tétel (Roth, 1982). *A felső körcsere algoritmus taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Adott π preferenciák esetén módosítsuk az algoritmust úgy, hogy az i. játékosból kilépő éleket nem húzzuk be; a többi játékosból kilépő éleket a $\prec_j$ sorrendeknek megfelelően adjuk hozzá minden lépésben. Ekkor az algoritmus végére egy i gyökerű be-fenyőt kapunk (egy olyan fát, amelynek minden éle i felé van irányítva). Legyen K az ebben szereplő pontok halmaza. Világos, hogy akármilyen sorrendet használjon is az i. játékos, nem érheti el, hogy valamelyik $N - K$-beli játékos házát ossza neki az algoritmus. Vegyük észre, hogy a $\prec_i$ stratégiát választva az algoritmus szerint a $\prec_i$ sorrendben legjobb K-beli házat fogja megkapni; akárhogy is változtatja meg tehát a sorrendjét, ennél jobbat nem kaphat. □

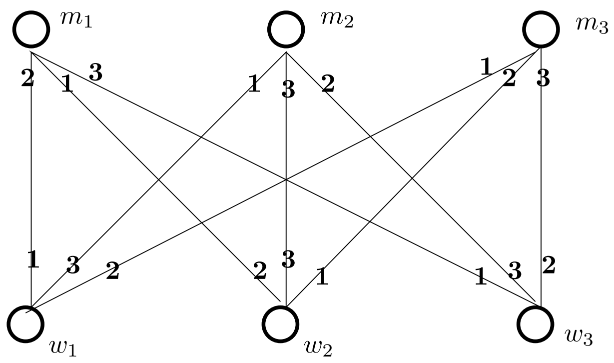
3.4. Stabil házasság

Egy házasságközvetítő irodát üzemeltetünk. n férfi és n nő keres nálunk párt; a beküldött anyagok alapján mindannyian kialakítottak a másik nemen egy preferenciasorrendet. A **stabil párosítási feladatban** ezen preferenciák alapján célunk n pár kialakítása úgy, hogy az mindenkinek a megelégedésére szolgáljon. Csupán javaslatokat tehetünk a párok kialakítására, amiket ők nem kötelesek elfogadni. Egy adott párosításra nézve egy m férfi és egy w nő **blokkoló párt** alkot, hogyha m párja a $w' \neq w$ nő, w párja az m' férfi, m-nek azonban jobban tetszik w mint w', w-nek pedig jobban tetszik m, mint m'. Vagyis ha m és w házasságot kötnének, mindketten jobban éreznék magukat, mint jelenlegi párjukkal. Egy párosítást **stabilnak** nevezünk, hogyha nincsen blokkoló pár.

Legyen M a férfiak, W a nők halmaza. Egy $a \in M \cup W$ ember rendezését a másik nemen $\prec_a$-val jelöljük: $x \succ_a y$ azt jelenti, hogy a-nak x jobban tetszik, mint y. Egy párosítást leírhatunk egy μ függvénnyel, ahol $a \in M \cup W$-re $\mu(a)$ az a párja.

Az újraelosztási feladathoz hasonlóan definiálhatjuk a párosítási feladat **magját**. Egy $S \subseteq M \cup W$ halmaz **blokkoló koalíció** a μ (nem feltétlenül stabil) teljes párosításra nézve, ha létezik olyan ν párosítás S-en, hogy minden $a \in S$ esetén $\nu(a) \in S$, és minden $a \in S$-re $\nu(a) \succeq_a \mu(a)$, és legalább egy helyen szigorú egyenlőtlenség áll. Vegyük észre, hogy egy blokkoló él egy kételemű blokkoló koalíció. Könnyen látható az alábbi állítás:

3.19. tétel. *A párosítási feladat magját pontosan a stabil párosítások alkotják.*



14. ábra

Tekintsük a 14. ábrán látható pédát. Itt az m_1w_1, m_2w_2, m_3w_3 párosítás nem stabil, mivel az m_1w_2 él blokkoló. Ezzel szemben m_1w_1, m_2w_3, m_3w_2 stabil párosítás. A továbbiakban stabil párosítások keresésével foglalkozunk.

Kicsit általánosabban beszélhetünk stabil párosításról egy tetszőleges $G = (M, W; E)$ páros gráfban. Itt nem tesszük fel, hogy $|M| = |W|$, és azt sem, hogy G teljes páros gráf; minden csúcsban adott egy preferenciasorrend a rá illeszkedő éleken. Egy (nem feltétlenül teljes) $F \subseteq E$ párosításra nézve mw blokkoló él, ha m vagy nem volt párosítva, vagy jobban tetszik neki w mint az F-beli párja, és ugyanez igaz w-re is. F stabil, ha nem létezik F-re nézve blokkoló él. Egy nem feltétlen teljes párosítást is leírhatunk egy $\mu : M \cup W \to M \cup W$ függvénnyel: legyen $\mu(a)$ az a párja, ha fedve a párosítás által, és legyen $\mu(a) = a$, ha fedetlen. A preferenciákat egészítsük ki úgy, hogy a preferenciasorrendjében saját maga is szerepel, a sorrend legvégén. Vagyis számára bármely G-beli szomszédjával párban lenni kedvezőbb, mint egyedül maradni. Ezzel a konvencióval mw pontosan akkor blokkoló él, hogy $\mu(m) \prec_m w$ és $\mu(w) \prec_w m$.

3.20. tétel (Gale, Shapely, 1962). *Tetszőleges $G = (M, W, E)$ páros gráfban létezik stabil párosítás. Ha $|M| = |W| = n$, és G teljes páros gráf, akkor létezik teljes, vagyis n méretű stabil párosítás.*

Bizonyítás. Megadjuk a **leánykérő algoritmust**, amely mindig talál egy stabil párosítást. Először mindegyik fiú megkéri a neki legjobban tetsző lány kezét. Ha egy lány több ajánlatot is kap, megtartja (feltételesen) a legjobbat, a többit pedig kikosarazza. Minden következő lépésben minden szingli fiú megkéri a neki legjobban tetsző olyan lány kezét, akitől még nem kapott kosarat, és akivel össze van kötve G-ben. Aki már minden neki valamennyire is tetsző lánytól kosarat kapott, az nem próbálkozik többet.

Lássuk be, hogy az így kapott F párosítás stabil! Vegyünk egy tetszőleges $mw \in E$ élt a gráfban. Ha az algoritmus során m megkérte w kezét, akkor w-nek ezután mindig lesz párja, méghozzá vagy m, vagy egy nála jobban tetsző. Ha m nem kérte meg w kezét, az azért lehet, mert egy w-nél jobban tetsző lány lett a felesége. Mindkét esetben látható, hogy az mw él nem blokkolja a kapott párosítást, ami tehát stabil.

Az állítás második feléhez figyeljük meg, hogy egy stabil párosítás mindig tartalmazásra nézve maximális, hiszen ha lenne él két szingli közt, akkor ők inkább összejönnének. (Megjegyezzük, hogy azonban nem feltétlenül maximális elemszámúak a stabil párosítások.) $\square$

A nemi szerepek felcserélésével beszélhetünk **legénykérő algoritmusról** is, amely szintén stabil párosítást ad.

3.21. feladat. *Milyen párosítást ad a 14. ábrán a leány- illetve a legénykérő algoritmus?*

Azt mondjuk, hogy a μ párosítás **dominálja a fiúk szempontjából** a ν párosítást, jelölve $\mu \trianglerighteq^M \nu$, ha minden $m \in M$ fiúra $\mu(m) \succeq_f \nu(m)$. Egy μ stabil párosítás **fiúoptimális**, ha minden ν stabil párosításra $\mu \trianglerighteq^M \nu$. Hasonlóan definiálhatjuk a dominálást lányok szempontjából ($\trianglerighteq^W$), illetve a lányoptimális stabil párosítást.

3.22. tétel. *A leánykérő algoritmus által adott μ stabil párosítás fiúoptimális, a legénykérő által adott pedig lányoptimális.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég belátni az elsőt. Tegyük fel indirekten, hogy létezik olyan ν párosítás és $m \in M$ fiú, hogy $\nu(m) \succ_m \mu(m)$. Ezért az algoritmus során kellett, hogy legyen olyan lépés, amikor valamelyik m fiú kosarat kap $\nu(m)$-től. Vegyük a legelső ilyen lépést; $w = \nu(m)$ azért kosarazta ki m-et, mert volt egy jobb kérője, m'. Mivel m szomorú esete a legelső ilyen, m' csak úgy kérhette meg w kezét, hogy $\nu(m')$-nél még nem próbálkozott, vagyis $\nu(m') \prec_{m'} w$. Következik az ellentmondás, mivel az $m'w$ él blokkolja ν-t. □

3.23. állítás (Knuth). *A μ és ν stabil párosításokra $\mu \trianglerighteq^M \nu \;\Leftrightarrow\; \mu \trianglelefteq^W \nu$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy $\mu \triangleright^M \nu$, azonban valamely $w \in W$ lányra $m = \mu(w) \succ_w \nu(w)$. Mivel $\mu \triangleright^M \nu$ miatt $w = \mu(m) \succeq_m \nu(m)$, ezért mw blokkoló él ν-re nézve. □

Ennél több is belátható: a $\trianglelefteq^M$ részbenrendezésre nézve a stabil párosítások *hálót* alkotnak: bármely két elemnek van egyértelmű legkisebb közös felső illetve egyértelmű legnagyobb közös alsó korlátja.

3.24. állítás (Conway). *A μ és ν stabil párosításokra definiáljuk azt a párosítást, hogy minden fiú a μ és ν szerinti párja közül a neki tetszőbbet választja. Ezáltal egy stabil párosítást kapunk.*

Bizonyítás. Be kell először látnunk, hogy így párosítást kapunk, vagyis minden lánynak legfeljebb egy párja lesz. Tegyük fel, hogy a w lányt két fiúhoz is hozzárendeljük: $\mu(m) = \nu(m') = w$ az m és m' fiúkra. w-nek egyikük jobban tetszik; a szimmetria miatt feltehetjük, hogy ez m. m-nek azért w-t választottuk ki párként, mert jobban tetszett neki, mint $\nu(m)$. Ekkor következik, hogy az mw él blokkolja a ν stabil párosítást, ami ellentmondást ad.

A stabilitáshoz tegyük fel, hogy egy mw él blokkolja az így kapott λ párosítást. Ha $\lambda(m) = \nu(m)$ és $\lambda(w) = \nu(w)$ volna, akkor mw már ν-t is blokkolná; ugyanez a helyzet μ-vel. Feltehetjük tehát, hogy ezek különböző párosításokhoz tartoznak; a szimmetria miatt legyen $\lambda(m) = \mu(m)$ és $\lambda(w) = \nu(w)$. Ekkor λ definíciója miatt $\nu(m) \prec_m \mu(m)$, vagyis az mw él blokkolja ν-t is (és ugyanígy μ-t is). □

Az előző állításban definiált stabil párosítást jelöljük $\mu \vee \nu$-vel. Könnyen belátható, hogy a $\trianglelefteq^M$ részbenrendezésre nézve ez μ és ν legkisebb közös felső korlátja lesz. Hasonlóan definiálható egy olyan párosítás, amelyben minden lány a neki jobban tetsző fiút választja a kettő közül. Ezt $\mu \wedge \nu$-vel jelöljük, és ugyanúgy látható, hogy a legnagyobb közös alsó korlát lesz.

Noha egyes párosítások minden fiú szempontjából jobbak másoknál, a következő állításban belátjuk, hogy akinek tetszőleges stabil párosításban nem jut pár, annak semmelyik másikban sem jut.

3.25. állítás. *Legyen ν és μ két tetszőleges stabil párosítás. Ha egy $a \in M \cup W$ fiúnak vagy lánynak ν-ben nem jut pár, akkor μ-ben sem fog jutni.*

Bizonyítás. Tegyük fel a szimmetria miatt, hogy $a_1 = a$ fiú, és noha $\nu(a_1) = a_1$ (vagyis ν-ben nincs párja), $\mu(a_1) = b_1 \neq a_1$. Ha b_1-nek nem volna párja ν-ben, akkor az $a_1 b_1$ él blokkolná ν-t (két magányos embert köt össze). Legyen $a_2 = \nu(b_1)$. Azt állítjuk, hogy $a_1 \prec_{b_1} a_2$. Valóban, $a_1 \succ_{b_1} a_2$ esetén $a_1 b_1$ blokkoló él lenne ν-re nézve. Ekkor $b_1 = \nu(a_2) \prec_{a_2} \mu(a_2)$, különben $b_1 a_2$ blokkolná ν-t. Ebből következik az is, hogy a_2 párosítva van μ-ben; legyen $b_2 = \mu(a_2)$. Az érvelést ugyanígy folytatva további $b_2, a_3, b_3, a_4, \ldots$ szereplőket azonosíthatunk. A ν és μ párosítások uniója egy olyan gráf, amelyben minden pont foka legfeljebb kettő. Ilyen módon ebben egy olyan sétát találunk, amelyben az első csúcs foka 1, és minden további csúcs foka 2. A fokszámok miatt ezen sétának egy végtelen útnak végtelen hosszúnak kell lennie, ami ellentmondás. □

Egy stabil párosítás kereső mechanizmust akkor nevezünk **taktikázásbiztosnak**, ha egy embernek se éri meg hamis preferenciát megadni, bármit is adtak meg a többiek. Beszélhetünk arról is, hogy egy mechanizmus a **fiúk** (illetve a **lányok**) **részéről taktikázásbiztos**, amikor ezt csak a fiúkra vagy csak a lányokra követeljük meg. Erről belátható az alábbi.

3.26. tétel (Roth). *A leánykérő algoritmus a fiúk részéről taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Csak arra az esetre bizonyítjuk a tételt, amikor $|M| = |W|$ és G teljes páros gráf. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamelyik fiú – feltehetjük, hogy m_1 – sikeresen tud taktikázni. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan $\pi = (\prec_{m_1}, \prec_{m_2}, \ldots, \prec_{m_n}, \prec_{w_1}, \ldots, \prec_{w_n})$ preferenciák, és m_1-nek egy másik, $\prec'_{m_1}$ preferenciája, hogy ha μ jelöli a fiúoptimális stabil párosítást a π-re, μ' pedig a fiúoptimális stabil párosítást a $\pi' = (\prec'_{m_1}, \prec_{m_2}, \ldots, \prec_{m_n}, \prec_{w_1}, \ldots, \prec_{w_n})$-re, akkor $\mu(m_i) \prec_{m_i} \mu'(m_i)$, vagyis m_i jobban jár, ha a hamis $\prec'_{m_1}$ preferenciasorrendet adja meg. Jelöljük Alg(π)-vel illetve Alg(π')-vel a lánykérő algoritmust az eredeti π preferenciákkal, illetve a π' preferenciákkal elvégezve.

Azt állítjuk, hogy feltehető, hogy $\prec'_{m_1}$-ben $\mu'(m_1)$ a legjobb. Ugyanis ha nem, akkor $\mu'(m_1)$-t a legjobb helyre téve az így kapott rendezéssel m_1 szintén sikeresen manipulálna, hiszen μ' eszerint is stabil, tehát m_1 párja ekkor is $\mu'(m_1)$ lenne.

3.27. állítás. *Minden m_j fiúra teljesül, hogy $\mu'(m_j) \succeq_{m_j} \mu(m_j)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mu'(m_j) \prec_{m_j} \mu(m_j)$. Ez azt jelenti, hogy Alg(π') során m_j-t $\mu(m_j)$ valamikor elutasítja. Legyen j az az index, amire először történik ilyen. Mivel μ_{m_j} elutasítja m_j-t, ezért ajánlatot kapott valakitől, akitől Alg(π) során nem kap ajánlatot. De j választása miatt ez a fiú nem lehet m_k $k \neq 1$-re, másrészt m_1 sem, hiszen akkor $\mu(m_j) = \mu'(m_1)$ lenne és $m_1\mu(m_j)$ blokkoló él lenne μ-re. ◇

A fenti állítás következménye, hogy minden lánykérés, ami Alg(π') során megtörténik, az Alg(π) során is megtörténik. Emiatt nem m_1 az utolsó kérő Alg(π)-ben, hiszen az utoljára megkért lányt csak egy fiú kéri meg, ezért ugyanez a fiú kéri meg Alg(π') során is. Tegyük fel, hogy Alg(π) során m_1 a k-adik lépésben kéri meg utóljára egy lány kezét.

3.28. állítás. *Ha egy m_j fiú Alg(π) során a k-adik lépés után megkér egy lányt, akkor $\mu(m_j) = \mu'(m_j)$, és $\mu(m_1) = \mu'(m_1)$.*

Bizonyítás. Nevezzünk egy lánykérést beteljesülőnek, ha végül házaspárt alkot a pár. Indukcióval bizonyítunk, a beteljesülő lánykérések ideje szerint fordított sorrendben. Láttuk, hogy az Alg(π)-beli utolsó kérőnek ugyanaz a párja μ-ben és μ'-ben. Tegyük fel, hogy az m_q fiú az r-edik lépésben kéri meg $\mu(m_q)$ kezét és hogy az r. lépés utáni beteljesülő lánykérésekre igaz, hogy μ'-ben is párt alkotnak.

Legyen M' azon fiúk halmaza, akiknek $\mu(m_q)$ jobban tetszik, mint a saját μ-beli párjuk, vagyis, akiket $\mu(m_q)$ elutasít Alg(π) során. Ha $M' = \emptyset$, akkor $\mu(m_q)$-t nem kéri meg m_q-n kívül más Alg(π) során, így Alg(π') során se, tehát $\mu(m_q) = \mu'(m_q)$. Ha $M' \neq \emptyset$, akkor legyen m_u a $\mu(m_q)$-nak legjobban tetsző fiú M'-ben. Vagyis $\mu(m_q)$ valamikor elutasítja m_u-t m_q miatt, vagy az r-edik lépésben, vagy később. Tehát m_u az r-edik lépés után kéri meg a végső párját, így az indukciós feltevés miatt $\mu(m_u) = \mu'(m_u)$. Mivel $m_u \neq m_1$, ebből következik, hogy Alg(π')-ben m_u megkéri $\mu(m_q)$-t, aki visszautasítja. $\mu(m_q)$ kérői csak M'-beliek vagy m_q lehetnek, tehát m_q miatt utasítja vissza. Tehát $\mu'(m_q) = \mu(m_q)$. A bizonyítás $m_q = m_1$ esetén is működik. ◇

Ezzel beláttuk, hogy $\mu'(m_1) = \mu(m_1)$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát a tételt beláttuk. □

3.29. feladat. *A 14. ábra segítségével mutassuk meg, hogy a lányok szempontjából a leánykérő algoritmus nem taktikázásbiztos: az egyik lány hamis preferenciák bevallásával jobb párt tudna szerezni magának.*

3.30. tétel (Roth). *A párosítási feladatnál nem létezik mindenki számára taktikázásbiztos mechanizmus.*

Bizonyítás. Nézzük azt a példát, ahol a preferenciasorrendek a következők (az első helyen a legjobban tetsző szerepel):

$$\begin{array}{llllllllll} m_1: & w_2, & w_1, & w_3; & \quad & w_1: & m_1, & m_3, & m_2 \\ m_2: & w_1, & w_2, & w_3; & & w_2: & m_3, & m_1, & m_2 \\ m_3: & w_1, & w_2, & w_3; & & w_3: & m_1, & m_2, & m_3 \end{array}$$

Ellenőrizhető, hogy két stabil párosítás van, méghozzá a $\mu = \{m_1w_2, m_2w_3, m_3w_1\}$, ami a lányoptimális és a $\nu = \{m_1w_1, m_2w_3, m_3w_2\}$, ami a fiúoptimális.

Ha az m_1 fiú a w_2, w_3, w_1 sorrendre változtat, akkor a ν lesz az egyetlen stabil párosítás, így ha egy mechanizmus a μ-t adja, akkor m_1 sikeresen tud taktikázni.

Fordítva hasonlóan, ha a w_1 az m_1, m_2, m_3 sorrendet mondja, akkor az egyetlen stabil párosítás a ν lesz, így ha egy mechanizmus a ν-t adja, akkor w_1 tud sikeresen taktikázni. Tehát nem létezhet mindenki számára taktikázásbiztos mechanizmus. □

3.5. Felvételi ponthatárok

A stabil párosítások fontos és igen elterjedt alkalmazási területe az egyetemi felvételi rendszer. Minden hallgatónak van egy preferenciasorrendje azon szakokról, ahova felvételizni szeretne. Az egyes szakokon adott egy q_h keretszám, amit nem léphetnek túl. Adott továbbá minden szaknak egy preferenciasorrendje az oda jelentkező hallgatókról.[3] Legyen H a felvételizők halmaza, S pedig a szakoké. Az s szakon legyen q_s a keretszám. Nem minden hallgató jelentkezik minden szakra; legyen $(H, S; E)$ az a páros gráf, amelyben $hs \in E$ akkor, ha h beadta jelentkezését az s szakra. Egy hozzárendelést – a stabil párosításokhoz hasonlóan - jellemezhetünk egy μ függvénnyel. μ minden hallgatóhoz azt a szakot rendeli, ahova felvették, egy s szakhoz pedig $\mu(s)$ az oda felvett hallgatók *halmazát* adja meg.

Tegyük fel először, hogy a hallgatóknak is szigorú preferenciái vannak a szakokon, valamint a szakoknak is az oda jelentkező hallgatókon. Egy $hs \in E$ él **blokkol** egy hozzárendelést, ha h-t nem vették fel s-re, noha h szívesebben jött volna ide, mint ahova végül felvették, másrészt pedig s vagy nem töltötte be a keretét, vagy felvettek egy olyan hallgatót, aki h mögött volt a sorrendben. (Formálisan: $s \prec_h \mu(s)$, és vagy $|\mu(s)| < q(s)$, vagy létezik egy $h' \in \mu(s)$ hallgató, akire $h' \prec_s h$.) Stabil a hozzárendelés, ha nincs blokkoló él.

A leánykérő algoritmus apró módosításával találhatunk stabil hozzárendelést: először minden s szak felvételi ajánlatot tesz a sorrendben legelső q hallgatónak. Ha egy hallgató több ajánlatot is kap, a legjobbat elfogadja, a többit visszautasítja. Ha a visszautasítások miatt egy szakon üres helyek keletkeznek, újra ajánlatot tesznek a sorrendben következő annyi hallgatónak, akivel fel tudják tölteni a létszámot (feltéve, hogy van még ennyi jelentkező). Ha egy hallgató már visszautasította egy szak ajánlatát, akkor az a szak többet nem tesz neki ajánlatot. Így végül egy stabil hozzárendelést kapunk. A stabil házassághoz hasonlóan belátható, hogy ez az egyetemek szempontjából lesz a lehető legjobb. Ugyanúgy csinálhatunk egy másik algoritmust is, amelyben a hallgatók tesznek ajánlatot az egyetemeknek; ez a hallgatók szempontjából lesz optimális.

Ezt a feladatot egészében visszavezethetjük stabil párosítás keresésére. Minden s szakot helyettesítsünk q_s darab új ponttal: (s, i) az s szakra i. helyen felvett hallgatót reprezentálja. Minden (s, i) pont örökölje az s preferenciáit. Egy h hallgató preferenciáit adjuk meg úgy, hogy $(s, i) \prec_h (s', i')$, ha eredetileg $s \prec_h s'$, vagy pedig $s = s'$ és $i' < i$. Könnyen belátható az alábbi állítás.

3.31. állítás. *A fenti konstrukcióban egy stabil párosítás az eredeti feladatban egy stabil hozzárendelést ad. Megfordítva, minden stabil hozzárendeléshez megadhatunk egy stabil párosítást, ahol az s szakra felvett t hallgatót az $(s,1), (s,2), \ldots, (s, t)$ pontokhoz osztunk be, az s preferenciái szerint csökkenő sorrendben.*

Ennek segítségével a 3.25. állításból levezethető az alábbi, talán meglepő eredmény.

3.32. tétel (Vidéki főiskola tétel). *Legyen μ és ν tetszőleges stabil hozzárendelések. Ha ν-ben valamely s szak nem tudta feltölteni a keretét, vagyis $|\nu(s)| < q(s)$, akkor semmelyik másik stabil hozzárendelésben sem tudta; ráadásul éppen ugyanazokat a hallgatókat veszik fel mindig, vagyis $\mu(s) = \nu(s)$.*

[3] Egy korábbi hasonló alkalmazás a rezidens-elhelyezési feladat: a frissen végzett orvosok különböző kórházakba pályázhatnak rezidensi állásokra.

Bizonyítás. Tekintsük az előző állításban tárgyalt konstrukciót! A 3.25. állítás szerint ugyanazok az (s, i) párok maradnak minden stabil párosításban fedetlenek. Ebből már következik, hogy tetszőleges két stabil hozzárendelésben $|\mu(s)| = |\nu(s)|$.

Legyen most μ a hallgatóoptimális hozzárendelés (amit azzal a „szakkérő” algoritmussal kapunk, ahol a hallgatók tesznek ajánlatot az egyetemeknek.) Belátjuk, hogy tetszőleges $h \in \mu(s)$-re következik $h \in \nu(s)$. A halmazok elemszámának azonossága miatt ebből rögtön adódik, hogy mindegyik halmaz azonos. A hallgatóoptimalitás miatt $\nu(h) \preceq_h \mu(h)$. Ha tehát $\nu(h) \neq s$, akkor $\nu(h) \prec_h \mu(h)$. Ekkor hs blokkolja ν-t, mivel $|\nu(s)| < q(s)$. □

A magyar felvételi rendszerben 1985 óta alkalmaznak stabil párosítási algoritmusokat. Az előző modellhez képest fontos eltérés, hogy a szakoknak nincs teljes rendezése a jelentkezőkön: minden jelentkező minden szakon egy pozitív egész pontszámot kap, maximum D-t (jelenleg $D = 500$). Legyen r_{ij} az i. hallgató pontszáma a j. szakon (feltéve hogy $h_i s_j \in E$). Az azonos pontszámot elért hallgatók között azonban nem lehet diszkriminálni: a felvételi úgy működik, hogy minden szakon meghúznak egy ℓ_j ponthatárt. A h_i hallgató **felvehető** az s_j szakra, ha $h_i s_j \in E$ és $r_{ij} \geq \ell_j$. Egy hozzárendelésben minden hallgatót a preferenciasorrendjében szereplő első olyan szakra kell felvenni, ahova felvehető.

Az $(\ell_1, \ldots, \ell_m)$ vektort **ponthatárhúzásnak** nevezzük; egy ponthatárhúzás egyértelműen meghatározza a hallgatók hozzárendelését a szakokhoz. Legyen x_j a j. szakra felvett hallgatók száma. Egy ponthatárhúzás akkor **megengedett**, ha minden j-re $x_j \leq q_j$, vagyis sehol nem lépik át a kvótát. Egy megengedett ponthatárhúzás **stabil**, ha minden s_j szakra igaz a következő: ha eggyel csökkentenénk a ponthatárt, akkor több mint $q_j - x_j$ olyan hallgató lenne, aki $\ell_j - 1$ ponttal már felvehető, és szívesebben jönne ide, mint ahova most fel van véve.

Célunk egy stabil ponthatárhúzás meghatározása. A leánykérő algoritmushoz szellemét követve induljunk onnan, hogy mindegyik ponthatár $\ell_j = D+1$, vagyis senkit sem vesznek fel sehova; ez megengedett, de (általában) nem stabil. Minden lépésben egyszerre fogjuk az összes ponthatárt módosítani. Egy adott lépésében legyenek $(\ell_1, \ldots, \ell_m)$ a ponthatárok és $(x_1, \ldots, x_m)$ az ezen ponthatárok mellett felvett hallgatók száma. Minden j-re és $0 \leq b \leq \ell_j$ egészre legyen $\beta_j(b)$ azon hallgatók száma, akikre $r_{ij} \geq b$, és eddig vagy nem vették fel őket sehova, vagy a preferenciasorrendjükben s_j-nél rosszabb helyre kerültek be. Legyen az új ℓ_j a legkisebb olyan b érték, amelyre $x_j + \beta_j(b) \leq q_j$. Világos, hogy minden lépésben az új ℓ_j ponthatárok is megengedett ponthatárhúzást adnak. Az algoritmus akkor ér véget, ha valamelyik lépésben egyik ponthatár sem változik. Ez azzal ekvivalens, hogy minden j-re $b = \ell_j$, vagyis $\beta_j(\ell_j - 1) > q_j - x_j$, ami épp a stabilitást mutatja. Az algoritmus $D|S|$ lépésen belül véget ér, hiszen minden lépésben legalább egy szak legalább eggyel csökkenti a pontját.

3.33. feladat. *Adjunk meg egy másik algoritmust, a hallgatók „szempontjából”!*