Játékelmélet jegyzet

Végh László (veghal@cs.elte.hu)
Király Tamás (tkiraly@cs.elte.hu)
Pap Júlia (papjuli@cs.elte.hu)

2025. november 26.

Bevezetés

Játékelmélet alatt sok, egymással lazán vagy szorosabban összefüggő területet értünk; a kurzuson ezek közül négyet fogunk érinteni. Az 1. fejezet kombinatorikus játékokról szól: ide tartoznak olyan népszerű táblajátékok is, mint a sakk vagy a go. Belátunk egyrészt igen általános eredményeket, mint például azt, hogy a sakkban vagy kell legyen az egyik játékosnak nyerő, vagy mindkettőnek nem vesztő stratégiája (de nem tudjuk, ezek közül melyik teljesül). Emellett megadjuk néhány egyszerű kombinatorikai játék teljes elemzését is. A fejezet tárgyalásmódja a *Véges matematika* tárgyhoz kapcsolódik szorosan: elemi, ám olykor igen ravasz kombinatorikai megfontolásokkal találkozunk.

A 2. fejezet a stratégiai játékokra vonatkozó alaperedményeket mutat be. Ez számít a játékelmélet központi területének és szolgál a közgazdaságtan legfontosabb matematikai alapjaként. Megszületését hagyományosan Neumann János és Oskar Morgenstern *Játékelmélet és gazdasági viselkedés* című könyvének 1944-es megjelenéséhez kötik. Fő kérdésfeltevése olyan szituációk elemzése, amelyekben egymással érdekellentétben álló, racionálisan cselekvő egyének hoznak döntéseket. Ilyenre a legkülönbözőbb kontextusokban láthatunk példákat. A fejezet egyes részeihez szükséges a lineáris programozás alapjainak ismerete, ami az *Operációkutatás* kurzuson szerepelt.

A harmadik fő terület a mechanizmustervezés (4. fejezet): osztozkodási folyamatok, társadalmi döntések igazságos meghozatalát biztosító eljárások tervezése. Amellett, hogy megtanulunk igazságosan elosztani egy pizzát illetve megmutatjuk, hogyan hozhatóak létre stabil párkapcsolatok, fontos lehetetlenségi eredményekkel is szembesülünk, például azzal, hogy nem lehet igazságos választásokat rendezni.

Végül a 5. fejezetben a kooperatív játékelmélet alapjai kerülnek terítékre. Itt koalíciók kialakulását és viselkedését vizsgáljuk, valamint a mechanizmustervezéshez kapcsolódóan azt, hogy milyen osztozkodási eljárásokkal lehet elérni az összes játékos összefogását.

A jegyzet anyagán túl az alábbi irodalmak szolgálhatnak kiindulásul:

– *A.N. Karlin, Y. Peres*, Game Theory, Alive, *elektronikus könyv:*
homes.cs.washington.edu/ karlin/GameTheoryBook.pdf – Az összes fejezethez kapcsolódik

– *T. S. Ferguson*, Game Theory *elektronikus jegyzet:*
www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html – szintén.

– *E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy*, Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 1., *A K Peters, Wellesley, MA, 2001* – Az 1. fejezethez

– *Csákány B.*, Diszkrét matematikai játékok, *Polygon Könyvtár, Szeged, 2005* – Az 1. fejezethez.

– *N. Nisan, T. Roughgarden, É. Tardos, V. V. Vazirani*, Algorithmic Game Theory, *Cambridge University Press, New York, 2007*, – A 2. és 4. fejezetekhez.
www.cambridge.org/journals/nisan/downloads/Nisan_Non-printable.pdf

– *David Pritchard*, Game Theory and Algorithms, *órajegyzet*: ints.io/daveagp/gta/

– További elektronikus jegyzetek minden mennyiségben: www.gametheory.net/lectures/level.pl

Tartalomjegyzék

1. Kombinatorikus játékok

Kombinatorikus játékok alatt kétszemélyes játékokat fogunk érteni, ahol a játékosok felváltva lépnek. Ebbe az osztályba tartoznak az olyan népszerű táblajátékok, mint a sakk, a malom vagy a go. A pontos definíció megadása előtt néhány könnyen kielemezhető példával kezdünk.

A **nim** játékban adott egy kupacban n kavics. Két játékos felváltva lép: minden lépésben a soron következő játékos egy, kettő vagy három kavicsot vehet el; az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Könnyen látható, hogy pontosan akkor van a kezdő játékosnak nyerő stratégiája, ha n nem osztható 4-gyel. Ilyenkor ugyanis tud úgy lépni, hogy a kavicsok számát néggyel oszthatóvá tegye; ellenben ha a kavicsok száma néggyel osztható, tetszőleges lépés elrontja ezt a tulajdonságot.

Következő játékunkban adott két kupacnyi kavics. A soron következő játékos kiválasztja az egyik kupacot, és abból egyet vagy többet elvesz. Az veszt ismét, aki nem tud lépni. Kinek van nyerő stratégiája?

1.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a két kupacban ugyanannyi kavics van, akkor a második játékos mindig tud nyerni, minden egyéb esetben pedig a kezdőnek van nyerő stratégiája!

Három kupac esetére már jóval bonyolultabb a válasz; később azonban tetszőleges számú kupacra is megadjuk a nyerő stratégiákat. Addig is, barátkozhatunk a játékkal online játszható változatban: `www.dotsphinx.com/games/nim`.

Az eredeti nim általánosítható a következő módon. Adott pozitív egészeknek egy S halmaza, és a soron következő játékos mindig S-beli számú kavicsot kell elvegyen. Az veszt, aki nem tud lépni. (Az eredeti példában $S = \{1,2,3\}$.) Hány kavicsnál kinek van nyerő stratégiája?

Ennek megválaszolásához a nemnegatív egészeket két osztályba szeretnénk sorolni: N-be azokat tesszük, ahol a soron következő játékosnak van nyerő stratégiája (Next), P-be pedig azokat, ahol a másiknak. Világos, hogy $0 \in P$, továbbá P-be kell soroljunk minden olyan számot is, amely minden S-beli számnál kisebb. Az ezeknél nagyobb számokat növekvő sorrendben soroljuk be P-be vagy N-be.

Legyen n a soron következő szám; tegyük fel, hogy minden n-nél kisebb értéket már besoroltunk. Ha létezik olyan $s \in S$, amelyre $n - s \in P$, akkor n-et N-be soroljuk be, hiszen ekkor a soron következő játékos tud olyat lépni, ahonnan az indukció szerint már nyerni tud. Ha minden $s \in S$-re $n - s \in$ $\in N$, akkor viszont n-et P-be soroljuk be, ekkor ugyanis bárhogy lép, a másik játékosnak lesz nyerő stratégiája. A kezdő játékos nyerő állásai az N-beliek. Nyerő stratégiája az, hogy mindig P-belibe lép. Innen a második játékos a konstrukció miatt kénytelen újra N-belibe lépni.

Mindezen játékoknak a **betli** változata is értelmes: ebben nem nyer, hanem éppenhogy veszt az, aki utoljára lép.

1.2. feladat. Határozzuk meg az eddigi példák betli változatainak nyerő stratégiáit!

1.3. feladat. A **mérgezett csoki** játékban egy $n \times m$-es tábla csoki bal alsó kockája mérgezett: aki ezt megeszi, elveszti a játékot. A soron következő játékos kiválaszthatja a maradék csokidarab egy kockáját, és leharapja azt, valamint az összes tőle jobbra és felfele levő kockát. Bizonyítsuk be, hogy $n \times n$-es és $2 \times n$-es táblák esetén a kezdő mindig tud nyerni! Mi a nyerő stratégiája?

1.1. Definíció, nyerő stratégia létezése

A fenti példák után megadjuk a **kombinatorikus játékok** egy általános definícióját. Az alábbi tulajdonságokat követeljük meg.

– **Kétszemélyes** és **szekvenciális**: a két játékos felváltva lép.

– Adott egy (V, E) irányított gráf. V a lehetséges pozíciók (esetleg végtelen) halmaza. Egy pontból kiinduló élek a lehetséges lépéseknek felelnek meg. Teljesítenie kell a következőket:

  - A játék **végesfokú**: minden állásból csak véges sok másikba lehetséges lépni, vagyis a gráfban minden pont kifoka véges;
  - A játék **véges**: tetszőleges állásból véges sok lépésen belül véget ér a játék, akárhogy is játszanak, vagyis nincs végtelen hosszú irányított séta a gráfban.

– Általában (például ha ténylegesen játszanak a játékosok) adott egy p_0 kezdőállás is, ami lehet egy konkrét állás (mint a sakknál) vagy egy tetszőleges V-beli állás, a játék paramétereként.

– A játéknak kétféle kimenetele van: vagy az egyik játékos nyer és a másik veszt, vagy pedig döntetlen. A játék végállapotai a nyelők: azon elemei V-nek, ahonnan nem vezet kifele él. Minden nyelőre adott, hogy N, P, vagy D típusú. Ha az utolsónak lépő játékos N-beli nyelőbe lép, akkor veszít; ha P-belibe, akkor nyer; ha pedig D-belibe, akkor a játék döntetlennel ér véget. **Éles normál játék**ról beszélünk, ha minden nyelő P típusú; **betli játék**ról pedig akkor, ha mindegyik N típusú.

Vegyük észre, hogy a betli játékok is modellezhetők normál játékként: vegyünk fel egy új P típusú t nyelőt, és minden eredeti nyelőből húzzunk egy élt t-be.

Ha tetszőleges kezdőállást megengedünk, akkor a játékot **személytelennek** nevezzük. **Partizán** játékokban a két játékos szerepe különböző: adott a pozíciók egy (V_1, V_2) partíciója. A V_i elemei az i. játékos pozícióinak felelnek meg. V_1-beli állásból csak V_2-belibe lehet lépni, V_2-beliből pedig csak V_1-belibe. A sakk például partizán játék, mivel ugyanabból a táblaállásból más táblaállásokba mehetünk át attól függően, hogy melyik játékos következik. A személytelen és partizán játékok közti megkülönböztetésnek akkor lesz majd jelentősége, mikor játékok összegét definiáljuk.

Vizsgáljuk meg a sakk példáját kicsit közelebbről! Első közelítésben pozíciónak a tábla egy lehetséges állását tekintjük, azzal a plusz információval, hogy melyik játékos következik. (Egyes pozíciókból tehát csak a sötét, a többiből csak a világos játékos számára adott lépési lehetőség.) Ebben az esetben a játék nem lenne véges, mivel ugyanaz az állás végtelen sokszor megismétlődhetne. A sakk végességét két szabály garantálja: a játék döntetlennel végződik, ha háromszor is bekövetkezik ugyanaz a táblaállás, vagy ha ötven lépés során nem történik ütés vagy gyaloglépés. Ezen szabályokat is figyelembe véve, a pozíciónak a táblaálláson és a következő játékos megnevezésén kívül tartalmaznia kell azt az információt, hogy az adott állás hányszor szerepelt, és hogy mikor történt legutóbb ütés vagy gyaloglépés (és még pár további információt, pl. történt-e már sáncolás).

Stratégia alatt egy $V \to V$ függvényt értünk, amely minden V-beli helyzethez, amelyik nem nyelő, hozzárendeli az egyik ki-szomszédját: vagyis tetszőleges álláshoz hozzárendelünk egyet a lehetséges lépések közül. Egy játékos követi az adott stratégiát, ha mindig a stratégia által kijelölt pozícióba lép. **Nyerő** egy stratégia, ha őt követve mindig nyerni tudunk, akármit is lépjen közben a másik játékos. A következő tétel a kombinatorikus játékelmélet alaptételének tekinthető. A bizonyítás módszere a bevezető gondolatmenet általánosítása, a **visszafejtés** (angolul **backward tracking**).

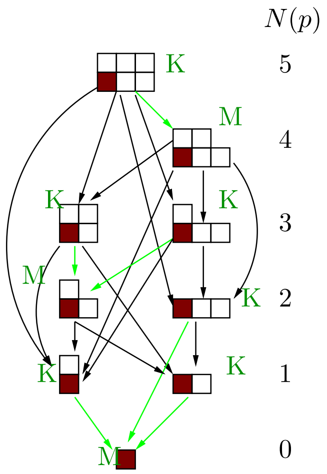
1.4. tétel. *Minden éles kombinatorikus játékban pontosan az egyik játékosnak van nyerő stratégiája. Minden kombinatorikus játékban vagy az egyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van nem vesztő stratégiája.*

Bizonyítás. Nyilván nem lehet mindkét játékosnak nyerő stratégiája, hiszen ekkor ha mindketten a nyerő stratégiájuk szerint játszanának, akkor mindkettejük nyerne, ami lehetetlen. Szükségünk lesz az alábbi lemmára:

1.5. lemma. *Véges és végesfokú játékban minden p pozícióra létezik egy $\beta(p)$ szám, hogy p-ből indulva $\beta(p)$ lépésen belül mindenképp véget ér a játék.*

1.6. megjegyzés. A végesség definíció szerint csak annyit tételez, hogy tetszőleges p-ből indított játék véget ér. Elképzelhető lenne azonban, hogy tetszőleges k-ra van legalább k lépésből álló lehetséges játékmenet. Nem végesfokú játékban ilyen tényleg lehet, végesfokúban azonban nem. A lemmában szereplő tulajdonsággal rendelkező játékot **korlátos lépésszámú**nak nevezzük. A bizonyítás a véges matematikából ismert Kőnig-lemma gondolatmenete.

Bizonyítás. A végesség mellett a végesfokúságot használjuk ki. Tegyük fel indirekten, hogy $p_0 := p$-ből indulva nem korlátos a lehetséges játékok hossza. A végesfokúság miatt az i. játékos csak véges sok lépés közül választhat; ezek közt kell tehát legyen egy olyan p_1, ahonnan még tetszőleges hosszú játék lehetséges. p_1-ből ugyanezzel az érveléssel találunk egy olyan p_2-t, ahonnan még tetszőleges hosszú játék lehetséges. Így folytatva egy $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots$ végtelen játékmenetet kapunk, ellentmondásban a végességgel. (A különböző p_i-k akár egybe is eshetnek, pl. lehet, hogy egy körön megyünk körbe-körbe.) $\diamond$



1. ábra

$\beta(p)$-t válasszuk a legkisebb értéknek, amely teljesíti a lemma feltételét. Ez tehát a p-ből indulva játszható leghosszabb játék hossza. Világos, hogy minden $pq \in E$ élre $\beta(q) \le \beta(p) - 1$. Ha p végállás, az épp azt jelenti, hogy a kifoka nulla, vagyis $\beta(p) = 0$.

Lássuk be a tételt először éles normál játékokra! Célunk az, hogy V-t N és P halmazok uniójára bontsuk úgy, hogy pontosan az N-beli állásokból nyerhessen mindig a soron következő játékos. A kívánt tulajdonság ehhez az, hogy N-beli pozícióból menjen él P-belibe, P-beliből viszont csak N-belibe lehessen lépni. Ekkor egy N-beli pozícióban az első játékosank nyerő stratégiája az, hogy N-beliből mindig valamely P-belibe lépünk, P-beliből pedig bárhova; és egy ugyanilyen stratégia egy N-beli pozícióból indulva a második játékosnak nyerő stratégia.

A beosztást $\beta(p)$ szerinti indukcióval végezzük. A végállapotokat, vagyis amikre $\beta(p) = 0$, helyezzük P-be. Tegyük fel, hogy minden olyan q-t, amire $\beta(q) < \beta(p)$, már besoroltunk P-be vagy N-be; például minden olyan q-t is, melyre $pq \in E$. Ha létezik legalább egy $pq \in E$ lehetséges lépés, amelyre $q \in P$, akkor helyezzük p-t N-be. Ha minden $pq \in E$ élre $q \in N$, akkor helyezzük p-t P-be. Ezáltal a teljes V-t két halmazra osztottuk. A bizonyítást a 1. ábra szemlélteti a 2×3-as mérgezett csoki játékra. (A játék online játszható itt: `www.math.ucla.edu/~tom/Games/chomp.html`.)

Nem éles játékok esetén a pozíciókat három osztályba osztjuk: N, P és D. D azon állásokat tartalmazza, ahonnan indulva mindketten garantálni tudják a legalább döntetlen kimenetelt (de nem tudja garantálni a győzelmet). Ismét $\beta(p)$ szerinti indukcióval osztjuk be a pozíciókat. A nyelők már be vannak osztva.

Az éles esettel megegyezően, ha létezik legalább egy $pq \in E$ lehetséges lépés, amelyre $q \in P$, akkor helyezzük p-t N-be. Ha nincs ilyen q, de létezik legalább egy olyan, amelyre $q \in D$, akkor helyezzük q-t D-be. Végül ha egyik eset sem teljesül, vagyis minden $pq \in E$ élre $q \in N$, akkor helyezzük p-t P-be.

Ezáltal D-beli pozícióból indulva mindenképp D-beli pozícióba érdemes lépni, különben átadjuk a másik játékosnak a nyerési lehetőséget. $\square$

Éles játékra a bizonyításban szereplő P halmazt a játék **magjának** nevezzük (vagyis azt az egyértelmű $P \subseteq V$ halmazt, amire P-beliből csak $V \setminus P$-belibe lehet lépni, de $V \setminus P$-beliből lehet P-belibe lépni). Egy állás **típusának** nevezzük P, N és D közül azt, amelyikben benne van.

1.7. megjegyzés. Ha V véges, akkor a fenti bizonyítás egyszerűbben elmondható. A játék végessége miatt a (V, E) gráf aciklikus, vehetjük tehát egy fordított topologikus sorrendjét, vagyis a pozíciók egy olyan $p_1, \ldots, p_n$ sorrendjét, ahol $p_i p_j \in E$ esetén $j < i$. Ebben a sorrendben soroljuk a csúcsokat N-be, P-be illetve D-be.

1.8. feladat. Hogyan lehetne a fenti tétel gondolatmenetét olyan játékokra általánosítani, amiben a győzelem és vereség helyett tetszőleges valós számot megengedünk kimenetelnek, csak azt követelve meg, hogy a játék nulla-összegű legyen (tehát minden nyelő pontnál meg van adva, hogy az odalépő játékos mennyit fizet a másiknak)?

1.9. feladat. Két játékos a következő játékot játssza. Adott két kupac zseton, kezdetben az egyik n darab, a másik m darab. A játékosok felváltva lépnek. A sorra kerülő játékos valamelyik kupacot kidobja, és a másik kupacot két nemüres részre osztja. Az veszít, aki nem tud lépni (ez csak úgy lehet, hogy mindkét kupacban 1 zseton van). Milyen (n, m) párokra van a kezdő játékosnak nyerő stratégiája?

1.10. feladat. Tekintsük a következő játékot. Adott egy véges $S = \{s_1, s_2, \ldots s_k\}$ pozitív egészekből álló halmaz, és egy n szám. Van egy n kavicsból álló kupac, a két játékos ebből felváltva elvesz $s_i \in S$ darabot, tetszőleges i-re.

a) $S = \{2, 4, 7\}$ esetén határozd meg, hogy mely n számnak mi a típusa (tehát, hogy P-állás vagy N-állás-e)!

b) Bizonyítsd be, hogy tetszőleges véges S-re a P típusú állások halmaza egy idő után periodikus!

1.2. Stratégialopás

A 1.4. tétel konstruktív módszert ad a nyerő (vagy nem vesztő) stratégiák meghatározására. A hátránya az, hogy a lehetséges állások száma roppant nagy lehet: már egy kisméretű táblán játszott amőbában is csillagászati. Érdekes módon bizonyos játékokban annak ellenére meg tudjuk mondani, melyik játékosnak van nyerő vagy nem vesztő stratégiája, hogy a stratégiát magát nem tudjuk meghatározni.

1.11. tétel. *Tetszőleges $n \times m$-es mérgezett csoki játékban a kezdőnek van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás. A 1.4. tétel alapján vagy az kezdő, vagy a második játékosnak van nyerő stratégiája. Tegyük fel indirekten, hogy a második tud nyerni. Ekkor a teljes tábla P-beli, és a második játékos a kezdő tetszőleges lépésére tud P-beli pozícióba lépni. Legyen a kezdő játékos első lépése a jobb felső kocka leharapása! Erre reakcióként a második egy P-beli pozícióba tud lépni. Az első azonban egyből léphette volna ugyanezt, vagyis a teljes tábla nem lehetett P-beli, hiszen lehet belőle P-beli pozícióba lépni. □

A fenti tétel tükrében meglepő, hogy az $n \times n$ és $2 \times n$ méreteken kívül semmi más általános osztályra nem ismert az első játékos nyerő stratégiája. A fenti bizonyítási módszert **stratégialopásnak** nevezzük. Ennek egy másik érdekes alkalmazása az amőba. Tegyük fel, hogy egy véges méretű táblán játszunk, és az nyer, aki k jelet ki tud gyűjteni egyenesen vagy átlóban. (A végtelen táblán játszott amőba nem elégíti ki a kombinatorikai játék definícióját, hiszen egy játszma örökké is tarthat akár.)

1.12. tétel. *A véges táblán játszott amőbában a kezdőnek mindig van nem vesztő stratégiája.*

Bizonyítás. Ismét a 1.4. tétel alapján tegyük fel indirekten, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája! Helyezzen el a kezdő játékos tetszőleges m_0 mezőn egy X-et. Tegyen úgy, mintha ez nem lenne ott, és most kezdődne a játék! Játsszon úgy, ahogy a második játékos játszaná a nem vesztő stratégiáját! (Ezt megteheti: a stratégia minden táblaálláshoz hozzárendel egy lépést.) Az m_0 mezővel csupán akkor lehet probléma, ha a stratégia szerint neki éppen ide kellene lépnie. Ilyenkor válasszon tetszőleges még szabad m_1 mezőt, és lépjen ebbe. Most m_1 veszi át a „láthatatlan X" szerepét, és úgy játszik tovább az első játékos, mintha m_0-ra lépett volna, a stratégiájának megfelelően. Szükség esetén m_1-et további $m_2, m_3, \ldots$ mezőkkel helyettesíti, amíg nem nyer vagy be nem telik a tábla, mely esetben a játék döntetlennel végződik. □

A fenti bizonyítás az alábbi általános játékokra is működik. A **hipergrafikus játékokban** adott egy véges U alaphalmaz, és U részhalmazainak egy $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_t\}$ halmaza. A két játékos felváltva megjelöli U egy-egy elemét; az a játékos nyer, akinek először sikerül a saját jelével egy $\mathcal{H}$-beli halmaz minden elemét megjelölnie. Ha ez nem következik be addig, amíg U elemei elfogynak, akkor a játék döntetlennel ér véget. A fenti tételhez hasonlóan belátható, hogy egy hipergrafikus játékban a kezdőnek mindig van nem vesztő stratégiája.

1.3. k-nim és a Sprague-Grundy elmélet

1.3.1. Grundy-számozás

A **k-nim** játékban adott k kupac kavics, ezek méretei $n_1, \ldots, n_k$. A soron következő játékos pontosan az egyik kupacból vehet kavicsot, onnan viszont bármennyit, de legalább egyet. Az veszt, aki nem tud lépni.

1.13. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha a k-nimben hozzáveszünk a meglevő kupacokhoz két további, egyforma méretű kupacot, akkor a játék lényegében nem változik: ugyanannak a játékosnak lesz nyerő stratégiája.

A **pénzforgató** játékban adott n pénzérme, mindegyik fejjel vagy írással felfele. A két játékos közül a soron következő átfordíthat egy fejet írásra, és ezen kívül még egy ettől balra levő érmét átfordíthat az ellenkezőjére (akár fejről írásra, akár írásról fejre). Az veszt, aki nem tud lépni (vagyis amikor mindegyik érme írással van felfele).

1.14. feladat. A fenti feladat segítségével bizonyítsuk be, hogy a pénzforgató játék valójában ekvivalens a k-nimmel: ha (balról) az i. érme fej, az egy i méretű kupacnak felel meg.

Az a és b számok **nim-összegét** $a \oplus b$-vel jelöljük, és a következő módon kaphatjuk meg. Mindkét számot felírjuk kettes számrendszerben, és az azonos helyiértéken szereplő számokat modulo 2 összeadjuk (átvitel nélkül!). Például $19 \oplus 38 = 53$, ugyanis

$$\begin{array}{r} 10011 \\ \oplus\ 100110 \\ \hline 110101 \end{array}$$

Világos, hogy a nim-összeadás kommutatív és asszociatív művelet. A művelet két további egyszerű tulajdonsága:

$$a \oplus b = c \text{ –ből következik } b \oplus c = a \text{ és } a \oplus c = b; \qquad (1)$$

$$\text{az } a \oplus x = 0 \text{ egyenlet egyetlen megoldása } x = a. \qquad (2)$$

1.15. tétel (Bouton, 1901)**.** *Az $n_1, n_2, \ldots, n_k$ méretű kupacokkal játszott k-nimben a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k = 0$.*

Bizonyítás. P-belinek definiálunk egy állást, ha a kupacok méreteinek nim-összege 0, egyébként pedig N-belinek. Azt kell belátni, hogy P-beli állásból csak N-belibe lehet lépni, viszont minden N-beli állásból lehet P-belibe lépni. Tegyük fel, hogy egy P-beli állásban vagyunk, és a j. kupacból veszünk. Ekkor n_j egyenlő a többi $k-1$ kupacban levő számok nim-összegével; (2) miatt akárhogyan módosítjuk is n_j-t, a kapott állásban nem lesz 0 a nim-összeg.

Tegyük most fel, hogy egy N-beli állásban vagyunk! Vegyük a legnagyobb olyan helyiértéket, ahol az összeg kettes számrendszerbeli felírásában egyes szerepel! Legyen ez a t. helyiérték. Páratlan sok olyan kupacméret kell legyen, ahol a t. helyen 1-es szerepel; legyen n_j az egyik közülük. Legyen a az n_j-től különböző kupacméretek nim-összege. Vegyük észre, hogy $a < n_j$, ugyanis a t. és minden magasabb helyiértéken is 0 szerepel. Vegyünk el $n_j - a$ követ a j. kupacból! Ekkor $a \oplus a = 0$ értékű, vagyis P-beli állásba jutunk. □

Mi a helyzet, a k-nim betli változatával, tehát ha az veszít, aki az utolsó kavicsot veszi el? Egy kupac esetén az első játékos tud nyerni, feltéve, hogy legalább két kavics van; egy kavics esetén pedig a második játékos. Ha minden kupacban pontosan egy kavics van, akkor páros sok kupac esetén az első, páratlan sok esetén a második játékos nyer automatikusan, akárhogyan is játszanak – pont fordítva mint a normál esetben.

Belátjuk, hogy minden más esetben ugyanazok a nyerőállások, mint a normál k-nimben. Először is, ha egy kupacban egynél több kavics van, a többiben pontosan egy, akkor az első játékos mindig tud nyerni a nagy kupac 0-ra vagy 1-re állításával – összhangban azzal, hogy ilyenkor a nim-összeg nemnulla. Hívjuk az ilyen szituációt L-állásnak.

Tegyük fel, hogy a kupacméretek nim-összege nem nulla (és legalább két kupacban van még kavics). Egész addig, amíg legalább két kupacban van egynél több kavics, játsszon az első játékos úgy, ahogy a normál nimben, vagyis mindig lépjen úgy, hogy a kupacok nim-összegét 0-vá teszi. Vegyük észre, hogy az első játékos sosem léphet L-állásba, hiszen azokra a nim-összeg nemnulla. Előbb-utóbb bekövetkezik egy L-állás, amibe tehát a második játékos lépett. Innentől az első már nyerni tud. Ugyanígy látható, hogy ha a kezdeti nim-összeg nulla, akkor a második játékos tud nyerni.

A k-nimre tekinthetünk úgy, mintha 1-nimet játszanánk k párhuzamos példányban és mindig pontosan az egyikben szabad lépni. Most ezt általánosítva definiáljuk játékok összegét, és meghatározzuk az egyes játékokról ismert információk alapján az összeg nyerő pozícióit. A (V, E) és (V', E') játékok **összegén** a $V \times V'$ alaphalmazon játszott játékot értünk. (p, p')-ből pontosan akkor lehet (q, q')-be lépni, ha $pq \in E$ és $p' = q'$ vagy $p'q' \in E'$ és $p = q$. Ha p_0 és p'_0 kezdőpozíciók is meg vannak adva, akkor az összeg játékban is adott egy kezdőpozíció: (p_0, p'_0). Például a k-nim az 1-nimből ismételt összeadással kapható.

1.16. állítás. *Ha a $J = (V, E, p_0)$ játék P típusú, akkor a $J + J'$ összeg-játék tetszőleges J' játékra ugyanolyan típusú, mint J'.*

Bizonyítás. Annak a játékosnak, akinek J'-ben nyerő stratégiája van, a következő lesz a nyerő stratégiája $J + J'$-ben: lépjen J'-ben a stratégiája szerint, kivéve, ha a másik J-ben lép, ekkor a J-beli nyerő stratégiája szerint lépjen (hiszen J-ben a másodiknak van nyerő stratégiája). □

1.17. állítás. *Tetszőleges J és J' játékokra J és $J + J' + J'$ típusa megegyezik.*

Bizonyítás. A J-ben nyerő játékos játszon a J-beli nyerő stratégiája szerint, kivéve, ha a másik a J' egyik példányában lép, ekkor lépje ugyanezt a másik példányban. □

1.18. következmény. *Ha $J + J'$ P típusú, akkor minden J'' játékra $J + J''$ és $J' + J''$ típusa ugyanaz.*

Azt mondjuk, hogy a J és J' játék **ekvivalens**, ha $J + J'$ P típusú.

Az eredeti két játék nyerő pozícióinak ismeretében megadhatóak-e az összegjáték nyerő pozíciói? Első közelítésben nem: az 1-nimben minden $k > 0$ pozíció N-beli, a 2-nimben viszont (k, ℓ) akkor P-beli, ha $k = \ell$, egyébként N-beli. A P és N osztályokra bontás helyett a pozíciók finomabb kategorizálására lesz szükség, ezt adjuk meg a következő definícióban.

1.19. definíció. Adott (V, E) kombinatorikus játékra a $g : V \to \mathbb{N}_0$ függvényt **Grundy-számozásnak** hívjuk, ha minden $p \in V$-re

$$g(p) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : n \neq g(q)\ \forall pq \in E\}.$$

Ezt a definíciót így fogjuk rövidíteni:

$$g(p) = \operatorname{mex}\{g(q) : pq \in E\},$$

(ahol a mex a minimal excludant rövidítése és a legkisebb nemnegatív egészet jelöli, ami nincs benne a halmazban). Egy (V, E, p_0) kombinatorikus játék **Grundy-száma** a $g(p_0)$ szám.

Vegyük észre, hogy minden p végállapotra $g(p) = 0$ teljesül. Ha adott a g számozás, akkor kézenfekvően adódik, hogy $P = \{p : g(p) = 0\}$ és $N = \{p : g(p) > 0\}$, ugyanis éppen azokra az értékekre lesz $g(p)$ pozitív, amelyekre létezik olyan $pq \in E$, hogy $g(q) = 0$.

1.20. tétel. *Minden éles kombinatorikus játéknak létezik (és egyértelmű) a Grundy-számozása.*

A bizonyítás lényegében azonos a 1.4. tétel bizonyításával. Annyit kell csupán változtatni, hogy a soron következő p-t nem P-be vagy N-be soroljuk be, hanem $g(p)$-t definiáljuk.

Példaként tekintsük a **Wythoff-nimet**: ezt két kupaccal játszák, és a soron következő játékos vagy az egyikből vehet el akármennyit, vagy pedig mindkettőből ugyanannyit. Ezért - a 2-nimmel ellentétben - az (n, n) állás nem lesz automatikusan P-beli. A táblázat két koordinátatengelye a két kupac méretét jeleníti meg. A $p = (i, j)$ pozícióra $\beta(p) = i + j$, az értékeket erre vett indukcióval számolhatjuk.

5	5	3	4	0	6	8
4	4	5	3	2	7	6
3	3	4	5	6	2	0
2	2	0	1	5	3	4
1	1	2	0	4	5	3
0	0	1	2	3	4	5
	0	1	2	3	4	5

A Grundy számozás legfontosabb tulajdonsága, hogy két játék számozásának ismeretében meg tudjuk adni az összeg számozását:

1.21. tétel (Sprague, Grundy)**.** *Legyen $g : V \to \mathbb{N}_0$ illetve $g' : V' \to \mathbb{N}_0$ a (V, E) illetve (V', E') játékok Grundy-számozása. Ekkor a játékok összegének Grundy-számozása $g \oplus g' : V \times V' \to \mathbb{N}_0$.*

Bizonyítás. Legyen $(p, p') \in V \times V'$ az összegjáték egy pozíciója, és legyen $a = g(p) \oplus g'(p')$. Azt kell belátnunk, hogy (i) minden $0 \leq b < a$-ra létezik olyan (p, p')-ből éllel elérhető (q, q'), amelyre $g(q) \oplus g'(q') = b$; (ii) nincs olyan (p, p')-ből éllel elérhető (q, q') pozíció, amelyre $g(q) \oplus g'(q') = a$.

(i)-hez legyen $c = a \oplus b$, és legyen t a legnagyobb helyiérték, ahol c-ben egyes szerepel. Mivel $b < a$, ezért a t. pozícióban b-ben 0, a-ban pedig 1 szerepel. Mivel $a = g(p) \oplus g'(p')$, ezért $g(p)$ és $g'(p')$ közül az egyikben a t. helyen 0 van, a másikban pedig 1. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $g(p)$-ben szerepel 1. Ekkor $c \oplus g(p) < g(p)$. Mivel g az első játék Grundy-számozása volt, ezért van olyan $pq \in E$ él, hogy $g(q) = c \oplus g(p)$.

A játékok összegének definíciója alapján (q, p') elérhető (p, p')-ből. Ekkor

$$g(q) \oplus g'(p') = (c \oplus g(p)) \oplus g'(p') = c \oplus (g(p) \oplus g'(p')) = c \oplus a = b.$$

Itt az asszociativitást illetve (1)-et használtuk.

(ii) belátásához tegyük fel, hogy egy (q, q') éllel elérhető pozícióra $g(q) \oplus g'(q') = a$. Az összeg definíciója miatt vagy $p = q$ vagy $p' = q'$; a szimmetria miatt tételezzük fel az utóbbit. Ekkor $a = g(p) \oplus g'(p') = g(q) \oplus g'(p')$. (1) felhasználásával $g(p) = a \oplus g'(p')$ illetve $g(q) = a \oplus g'(p')$, tehát $g(p) = g(q)$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $pq \in E$. □

1.22. következmény. *A $J = (V, E, p_0)$ és $J' = (V', E', p'_0)$ játékok pontosan akkor ekvivalensek, ha $g_J(p_0) = g_{J'}(p'_0)$.*

1.23. következmény. *Minden J kombinatorikus játékhoz létezik egy egyértelmű g szám, hogy J ekvivalens a g-nimmel, méghozzá a játék Grundy-száma.*

Első példaként tekintsük a következő játékot! Három kupac kavics közül a soron következő játékosnak vagy az elsőből legfeljebb 3, vagy a másodikból legfeljebb 5, vagy a harmadikból legfeljebb 6 kavicsot kell elvennie (de legalább egyet mindenképpen). Kinek van nyerő stratégiája, ha a három kupac elemszáma eredetileg 19, 24, 15? Ha egy kupaccal játszunk és 1 és m közötti számú kavicsot vehetünk el, akkor könnyen látható, hogy az n kavicsú állás Grundy-száma éppen az n szám $m+1$-gyel való osztási maradéka. Vagyis a három játék Grundy-száma $g_1(19) = 3$, $g_2(24) = 0$, $g_3(15) = 1$. Az összeg értéke ennek megfelelően $g(19{,}24{,}13) = 3 \oplus 0 \oplus 1 = 2$, vagyis a kezdőnek van nyerő stratégiája.

1.24. feladat. Mi kell legyen a kezdő első lépése?

További példáink a tétel olyan alkalmazásait illusztrálják, amelyekben elsőre nem nyilvánvaló, hogy több játék összegéről van szó.

1.3.2. Kugli

A **kugliban** egy sorban kezdetben n kuglibábu van felállítva, melyeket a játék folyamán felborítunk. A soron következő játékos felboríthat egy vagy két szomszédos, még álló kuglit (de legalább egyet mindenképp fel kell borítania). Az nyer, aki az utolsó kuglit felborítja.

A játék szempontjából az egymás melletti, még álló bábuhalmazok mérete számít. Vegyük észre, hogy a játék ekvivalens a következő „kupacos játékkal”. Adott néhány kupac; a soron következő játékos az egyik kupac méretét csökkenti eggyel vagy kettővel, és a maradékot esetleg felosztja két tetszőleges méretű kupacra (de akár egyben is hagyhatja). Világos, hogy egy k kupaccal induló játék tekinthető k, egy-egy kupaccal játszott játék összegének. Emiatt a Grundy-számozás meghatározásához elég az egyetlen kupacra vonatkozó játék Grundy-számainak meghatározása. Egy n méretű kupacból indulva az $\{i, j\}$ kupacméretek elérhetőek, ahol $0 \leq i, j$, $n-2 \leq i+j \leq n-1$. Ennek megfelelően

$$g(n) = \operatorname{mex}\{g(n-1), g(n-2), g(1) \oplus g(n-2), g(1) \oplus g(n-3), g(2) \oplus g(n-3), g(2) \oplus g(n-4), \ldots\}.$$

Világos, hogy $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = 3$. A fenti képlet szerint

$$g(4) = \operatorname{mex}\{3{,}2{,}1 \oplus 2{,}1 \oplus 1\} = \operatorname{mex}\{3{,}2{,}3{,}0\} = 1.$$

Ezzel a módszerrel meghatározva $g(n)$ értékeit, kiderül, hogy $n \geq 70$-re a Grundy-számok periodikusak, a periódus hossza 12 (ezt nem bizonyítjuk be). Kiderül, hogy $n = 0$ az egyetlen szám, melyre $g(n) = 0$, vagyis mindig a kezdőnek van nyerő stratégiája. Ez valójában könnyen látszik Grundy-számozás nélkül is.

1.25. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a kugliban mindig a kezdőnek van nyerő stratégiája! Mi ez a stratégia?

1.3.3. Az általános pénzforgató játék

A korábban ismertetett pénzforgató játéknak tekintsük a következő általánosítását! Adott n pénzérme, mindegyik fejjel vagy írással felfelé. A soron következő játékosnak ki kell választania egy fejet, és azt írásra átfordítani. Ezen kívül az ettől balra levő érméknek egy, a szabályok által megengedett részhalmazát kell átfordítania. Az eredeti változatban ez az üres halmaz vagy tetszőleges egyelemű halmaz lehetett. Általában azt írjuk elő, hogy ez a részhalmaz csak a kiválasztott (jobbszélső) fej pozíciójától függhet, az érmék helyzetétől vagy a játék korábbi lépéseitől azonban nem. Formálisan, minden $1 \leq i \leq n$-re adott az $\{1, \ldots, i-1\}$ halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{S}_i$ halmaza. Egy lépésben ki kell választani egy i pozíciót, ahol fej szerepel, azt átfordítani, valamint kiválasztani egy $\mathcal{S}_i$-beli halmazt, és annak összes elemét is átfordítani.

Először is lássuk be, hogy ez egy véges játék. Egy pozíciót elkódolhatunk azzal a kettes számrendszerben felírt számmal, aminek a 2^i-hez tartozó helyiértéke 0, ha az $i+1$. pénzérme írás és 1, ha fej. Ez a szám minden lépésben csökkenni fog, hiszen egy egyest 0-ra változtatunk, és utána csak a kisebb helyiértékeken változtatunk.

A nim legelső változatát, amikor 1,2 vagy 3 kavicsot vehettünk el, például úgy mondhatjuk ezen a nyelven, hogy $i \geq 4$ esetén $\mathcal{S}_i = \{\{i-1\}, \{i-2\}, \{i-3\}\}$, $\mathcal{S}_1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{S}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$.

Az eredeti pénzforgató játék egy k-nimnek felelt meg. Az általános játék is egy általános kavicsos játéknak feleltethető meg. Adott néhány kupac kavics. A soron következő játékos kiválaszt egy i méretű kupacot, abból elvesz legalább egy kavicsot, a maradékot pedig kisebb kupacokra bontja. A szabály az, hogy minden új kupac mérete az $\mathcal{S}_i$ egyik eleme kell, hogy legyen. A lényegi észrevétel ismét az, hogy a játékosok nyerő stratégiáin nem változtat, ha két ugyanakkora kupacot hozzáveszünk a játékhoz (vagy pedig elveszünk).

Emiatt a megjegyzés miatt elég az olyan játékokra koncentrálnunk, ahol csak egyetlen fej van (vagyis amik egy kupacnak felelnek meg). Ugyanis egy tetszőleges érmesorozattal játszott játék ekvivalens k ilyen összegével, ahol k a fejek száma. Így például az $IFFIIFIF$ sorozat Grundy-száma az IF, IIF, $IIIIIF$ és $IIIIIIIF$ játékok Grundy-számainak nim-összege lesz. k-állásnak hívjuk azt, amikor a k. helyen áll fej, a többin írás.

Tekintsük most azt a játékot, amikor a jobbszélső fejen kívül még legfeljebb két másikat fordíthatunk át, vagyis $\mathcal{S}_i = \{A : A \subseteq \{1, \ldots, i-1\}, |A| \leq 2\}$. (A kavicsok nyelvén: kiválasztunk egy kupacot, elveszünk belőle legalább egyet, a maradékot pedig legfeljebb két részre osztjuk.)

Praktikusabb lesz ezúttal az érmék számozását 1 helyett 0-val kezdeni. Jelölje $g(k)$ a k-állás Grundy-számát. Világos, hogy $g(0) = 1$, hiszen egy fejből csak a csupa írás állapot (a végállapot) érhető el. Hasonlóan, $g(1) = 2$. A 2-állásból, vagyis IIF-ből elérhető III, FII, IFI illetve FFI. Ez utóbbi Grundy-száma $g(FFI) = g(FF) = g(F) \oplus g(IF) = g(0) \oplus g(1) = 3$, vagyis $g(2) = g(IIF) = 4$. Általában,

$$g(k) = \text{mex}\{0, g(1), \ldots, g(k-1)\} \cup \{g(i) \oplus g(j) : 0 \leq i < j \leq k-1\}.$$

Ez alapján kiszámolhatóak a következő értékek.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$g(k)$	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19	21	...

Láthatóan $g(k)$ mindig vagy $2k$ vagy $2k+1$ lesz. Belátjuk, hogy ez azon múlik, hogy k kettes számrendszerbeli felírásában az egyesek száma páros vagy páratlan. Ha páros sok egyes van, akkor számot **kegyesnek**, ha páratlan, akkor **kegyetlennek** nevezzük.

1.26. tétel. *Ha k kegyetlen, akkor $g(k) = 2k$, ha pedig kegyes, akkor $g(k) = 2k+1$.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhetőek az alábbi összefüggések:

$$\text{kegyes} \oplus \text{kegyes} = \text{kegyetlen} \oplus \text{kegyetlen} = \text{kegyes}$$
$$\text{kegyes} \oplus \text{kegyetlen} = \text{kegyetlen} \oplus \text{kegyes} = \text{kegyetlen}$$

Indukcióval bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy k-nál kisebb értékekre már beláttuk. Mivel megtehetjük, hogy a k. pozícióban levő érmén kívül senkit sem fordítunk át, ezért minden állásból elérhető a csupa írás állapot, melynek Grundy-száma 0. Egy további érme átfordításával elérhetünk minden olyan állapotot, amelyben az i. helyen áll csak fej ($0 \leq i \leq k-1$).

Vegyük észre, hogy a $\{g(i) : 0 \leq i \leq k-1\}$ halmaz éppen a $2k$-nál kisebb kegyetlen számok halmaza lesz. Valóban, egyrészt indukció miatt $g(i)$ kegyetlen $1 \leq i \leq k-1$-re. Másrészt ha $2t < 2k$ egy páros kegyetlen szám, akkor $g(t) = 2t$, hiszen t is kegyetlen; ha pedig $2t+1 < 2k$ kegyetlen, akkor $g(t) = 2t+1$, hiszen t kegyes.

Azt állítjuk, hogy a $\{g(i) \oplus g(j) : 0 \leq i < j \leq k-1\}$ halmaz éppen a 0 és $2k$ közötti kegyes számok halmaza. Valóban, megállapítottuk hogy két kegyetlen szám nim-összege kegyes, tehát a halmazban szereplő minden szám kegyes. Könnyen látható továbbá, hogy tetszőleges kegyes szám felbontható két nála kisebb kegyetlen szám nim-összegére: tetszőleges a kegyes számra ha $2^t < a$, akkor 2^t és $a - 2^t$ kegyetlen számok.

Összegezve: a k-állásból elérhető pozíciók Grundy-számai pontosan a $\{0,1\ldots,2k-1\}$ halmaz elemei, továbbá a $2k$, amennyiben kegyes. Ebből következik az állítás. $\square$

A következő pénzforgató játék a vonalzó nevet viseli. Itt a jobbszélső átforgatott érmétől balra bármennyit átforgathatunk, azonban csak úgy, hogy az összes átforgatott érme folytonosan helyezkedik el, azaz $\mathcal{S}_i = \{\emptyset, \{j, j+1, \ldots, i-1\} : 1 \leq j \leq i-1\}$. Maradjunk most a pozíciók eredeti, 1-gyel kezdődő számozásánál; jelölje $g(k)$ a k-állás Grundy-számát, tehát amikor az első $k-1$ érme írás, a k-adik pedig fej. Könnyen láthatóan

$$g(k) = \text{mex}\{0,\ g(k-1),\ g(k-1) \oplus g(k-2),\ \ldots, g(k-1) \oplus g(k-2) \oplus \ldots \oplus g(1)\}.$$

Kis k-kra az alábbi értékeket kapjuk:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$g(k)$	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	...

1.27. tétel. *$g(k)$ értéke a legnagyobb olyan 2-hatvány, amely osztja k-t.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk; tegyük fel, hogy k-nál kisebb értékekre beláttuk! Jelöljük $h(k)$-val a k-t osztó legnagyobb 2-hatványt! Szükségünk lesz egy lemmára:

1.28. lemma. *Minden z számhoz létezik egy olyan $f(z)$ érték, amelyre*

$$h(1) \oplus \ldots \oplus h(f(z)) = z.$$

Ha $2^t \leq z \leq 2^{t+1} - 1$, akkor $2^t \leq f(z) \leq 2^{t+1} - 1$.

Bizonyítás. Tekintsük z kettes számrendszerbeli felírását! A legnagyobb helyiértékű (a t. helyen álló) 1-est hagyjuk változatlanul. Innen a kisebb jegyek felé haladva, ha a megváltoztatott állapotban az előző jegy egyes, akkor a soron következő jegyet változtassuk ellenkezőjére; egyébként hagyjuk változatlanul. Legyen $f(z)$ az így kapott szám. Például $f(11) = 13$, ugyanis 11 kettes számrendszerbeli alakja 1011; a második számjegyet 1-esre kell változtassuk, mivel előtte egyes maradt; emiatt a harmadikat is meg kell változtatni. Ennek 0-ra változása miatt azonban az utolsót változatlanul hagyjuk, 1101-hez jutva.

Legyen z_i illetve $f(z)_i$ a z illetve $f(z)$ kettes számrendszerbeli felírásában az i helyiértéken szereplő számjegy. Azt kell belátni, hogy ha $z_i = 1$, akkor $h(1), \ldots, h(f(z))$ között 2^i páratlan sokszor szerepel, egyébként páros sokszor. A legmagasabb helyiértékre ez világos, hiszen a konstrukcióban $2^t \leq f(z) \leq$ $\leq 2^{t+1} - 1$ triviálisan teljesül.

Legyen r az $f(z)$ legkisebb $i + 1$ helyiértékének törlésével keletkező szám. Vegyük észre, hogy $h(1), \ldots, h(r)$ között 2^i páros sokszor szerepel. Tegyük fel, hogy $f(z)_{i+1} = 0$. Ekkor a konstrukció szerint $f(z)_i = z_i$. Ekkor $z_i = 0$ esetén $h(r+1), \ldots, h(f(z))$ közt 2^i egyszer sem szerepel, ha $z_i = 1$, akkor pedig pontosan egyszer. Ha viszont $f(z)_{i+1} = 1$, akkor $f(z)_i = 1 - z_i$. Valóban, ekkor $h(r+$ $+1), \ldots, h(r+2^{i+1})$ közt 2^i egyszer szerepel. Ezért szükséges az i. számjegyet ellenkezőjére változtatni. ◇

Legyen $k = 2^t(2x + 1)$. Azt akarjuk igazolni, hogy $g(k) = 2^t$. A k-állásból elérhető állások a csupa írás (ennek Grundy-száma 0), illetve azon állások, amikor valamely $a \in \{1,2, \ldots k - 1\}$-re a $k-1, k-2, \ldots, k-a$ pozíciókban szerepel fej. Ez utóbbi Grundy száma az indukció miatt $g(k-1) \oplus$ $\oplus \ldots \oplus g(k-a) = h(k-1) \oplus \ldots \oplus g(k-a)$.

Ha $i < t$, akkor 2^i pontosan akkor osztja $k - a$-t, amikor a-t. Ha $i \geq t$ és $a < 2^t$, akkor 2^i nem osztója $k - a$-nak. Ezért $1 \leq a \leq 2^t - 1$-re $h(k - a) = h(a)$, ami alapján az indukció miatt

$$\begin{aligned}
&\{g(k-1), g(k-1) \oplus g(k-2), \ldots, g(k-1) \oplus \ldots \oplus g(k-2^t+1)\} = \\
&= \{h(k-1), h(k-1) \oplus h(k-2), \ldots, h(k-1) \oplus \ldots \oplus h(k-2^t+1)\} = \\
&= \{h(1), h(1) \oplus h(2), \ldots, h(1) \oplus \ldots \oplus h(2^t-1)\} = \\
&= \{g(1), g(1) \oplus g(2), \ldots, g(1) \oplus \ldots \oplus g(2^t-1)\}.
\end{aligned}$$

Ez utóbbi halmaz a lemma második fele miatt éppen az $\{1,2,\ldots,2^t-1\}$ halmazzal azonos. Az állítás következik, ha belátjuk, hogy $a \geq 2^t$ esetén $g(k-1) \oplus g(k-2) \oplus \ldots \oplus g(k-a) \neq 2^t$. $a = 2^t$-re $2^{t+1} \mid k-a$, ezért $2^{t+1} \mid g(k-a)$. Ekkor a nim-összeadandók között $g(k-a)$ az egyértelmű legnagyobb kettő hatvány, így a nim-összegben a legnagyobb helyiértékű egyes legalább a $(t+1)$-edik helyiértéken szerepel. Könnyű végiggondolni, hogy ha a értékét eggyel növeljük, a legnagyobb helyiérték nem csökkenhet. Ezért minden $a \geq 2^t$ esetén a nim-összeg szigorúan nagyobb lesz 2^t-nél. □

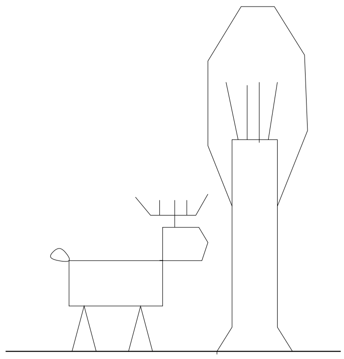
1.29. megjegyzés. A 1.28. lemmában megadott $f(z)$ számozást Gray-kódnak hívják, és számos további érdekes tulajdonsága van. Például minden z-re $f(z)$ és $f(z+1)$ pontosan egy számjegyben tér el a kettes számrendszerben.

1.3.4. A sövényvágó játék

A **sövényvágó játékban** adott egy (nem feltétlenül összefüggő) irányítatlan gráf (növények), és a csúcsok egy kijelölt T részhalmaza, melyek között nem megy él. T-re úgy gondolunk, mint a talajon elhelyezkedő csúcsokra. Két kertész a következő játékot játssza: felváltva kitörölnek egy-egy élt a gráfból, és vele együtt minden olyan csúcsot, ahonnan már nem lehet elérni a talajt (azaz T-beli pontot). Az veszt, aki nem tud lépni, vagyis már csak a T-beli csúcsok maradtak, amikor ő kerül sorra. A 2. ábra példájában a vastag vízszintes vonal a talaj, az arra eső pontok tartoznak T-be.

A játék legegyszerűbb változatában egy bambuszligeten játszanak: a gráf k diszjunkt útból áll, T ezek egyik végpontjainak halmaza. Vegyük észre, hogy ekkor a játék azonos a k-nimmel! A következőkben meghatározzuk a Grundy-számozást arra az esetre, amikor a gráf egy erdő (fák diszjunkt uniója), és minden fa pontosan egy T-beli pontot tartalmaz. Egy b csúcs leszármazottainak azokat a csúcsokat nevezzük, akikbe a talajtól b-n keresztül lehet eljutni.

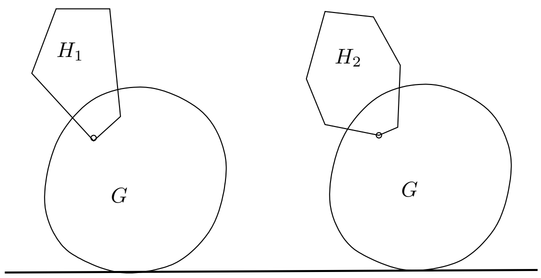
Nevezzük a gráf egy legalább harmadfokú csúcsát **bognak**, ha az ő leszármazottait tartalmazó komponensek mindannyian utak. Ezeket az utakat **hajtásnak** nevezzük.



2. ábra

1.30. állítás. *Ekvivalens játékot kapunk, ha egy bognál eltávolítjuk az összes hajtást, és a hosszaik nim-összegével megegyező hosszúságú hajtással helyettesítjük.*

Bizonyítás. Általánosabban a következőt bizonyítjuk. Legyen G tetszőleges gráf, H_1 és H_2 pedig két olyan gráf, amelyek Grundy-száma azonos, és egyetlen T-beli pontot tartalmaznak. Ezzel a T-beli ponttal ragasszuk rá H_1-et illetve H_2-t G-nek ugyanarra a csúcsára. Ezáltal a G_1 és G_2 gráfokat kapjuk (ld. 3. ábra).



3. ábra

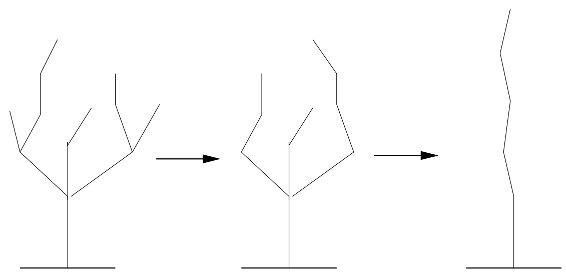
Belátjuk, hogy G_1 és G_2 Grundy-száma ugyanaz. Ez pontosan akkor teljesül, ha a nim-összegük nulla, ami pedig épp azzal ekvivalens, hogy a $G_1 + G_2$ gráfon (a diszjunkt unión) játszott játékban a másodiknak van nyerő stratégiája.

Jelöljük H_1^i-vel és H_2^i-vel a H_1-ből illetve H_2-ből maradt aktuális részt az i-edik lépés után és vegyünk egy páros i-t, vagyis egy olyan állást, amikor az első játékos jön. Ha az első játékos G-beli élt választ az egyik gráfban, akkor a második válassza ugyanazt a másik gráfban! Ha pedig H_1^i vagy H_2^i-beli élt választ, akkor pedig válasszon úgy egy élt H_1^{i+1}-ben vagy H_2^{i+1}-ben, hogy a H_1^{i+2} és H_2^{i+2} Grundy-száma továbbra is megegyezzen. Ez lehetséges, hiszen H_1^{i+1} és H_2^{i+1} Grundy-száma különböző lesz, és a nagyobbik Grundy-számúban el tudunk vágni egy élt úgy, hogy utána ugyanaz legyen a két Grundy-szám. □

Az előbbi állítás segítségével tetszőleges erdőt vele azonos Grundy-számú bambuszligetté alakíthatunk. Ha már nincsen bog, készen vagyunk. Ha van, akkor az egyiken alkalmazzuk az állításban szereplő műveletet; ezáltal a bogok száma csökken. A 4. ábra ezt illusztrálja.

1.31. feladat. A fenti átalakítási folyamat segítségével dolgozzunk ki eljárást a nyerő stratégia meghatározására!

1.32. megjegyzés. Valójában az is bebizonyítható, hogy ha a gráfban van kör, akkor ekvivalens játékot kapunk, ha a kört összehúzzuk egy ponttá (a kör éleiből így hurokélek lesznek, amiket aztán 1-hosszú hajtásokkal helyettesíthetünk). A *Winning Ways for Your Mathematical Plays* könyvben található bizonyítás elég bonyolult, viszont a segítségével algoritmust is kapunk a nyerő stratégiára. Ha ezt kombináljuk a fenti átalakítással, akkor azt kapjuk, hogy a sövényvágó játékban van polinomiális algoritmus a nyerő stratégia meghatározására.



4. ábra

1.4. Partizán játékok

Ebben a fejezetben partizán játékokat vizsgálunk. Legyen a két játékos Piros és Kék, és ennek megfelelően a pozíciók két osztályát színezzük pirosra és kékre: a piros játékos csak piros pozícióból léphet kékre, Kék pedig csak kékről pirosra. Az eddig tanultakból már következik, hogy minden pozíciónál vagy a kezdőnek vagy a másik játékosnak van nyerő stratégiája, és a Grundy számozást is meg tudjuk határozni. A kérdés az, hogy játékok összege hogyan értelmezhető?

Hogy összegről lehessen beszélni, olyan játékokat kell tekintenünk, ahol a piros és kék pozíciók között van egy bijekció; az egyszerűség kedvéért úgy is mondhatjuk, hogy csak egy pozíció-halmaz van, de egy adott pozícióból Pirosnak és Kéknek különbözőek a lehetséges lépései. Speciálisan a kezdőpozíciónak is két Grundy száma van: ha Piros kezd, illetve ha Kék kezd. Ezért az ilyen játékoknak négy típusa van:

– Mindkettő pozitív: kezdő nyer

– Piros pozitív: bárki kezd, Piros nyer

– Kék pozitív: bárki kezd, Kék nyer

– Mindkettő 0: kezdő veszít.

A J és J' játék összegének a természetes definíciója az, hogy a soron következő játékos a személytelen összeghez hasonlóan kiválaszthatja hogy melyik játékban lép, de ott csak a saját színének megfelelő lépést tehet. Figyeljük meg, hogy ez a definíció nem ugyanaz, mint a személytelen összeg, ezért a Grundy számozás sem használható az összeg típusának a megállapítására. Ráadásul az összeg végességével is gondok vannak:

1.33. állítás. *Van olyan J és J' korlátos lépésszámú játék, hogy $J + J'$ nem véges.*

Bizonyítás. Legyen J és J' pozícióhalmaza a nemnegatív egészek halmaza. J-ben Piros i-ből $(i + 1)$-be léphet ha $i > 0$, Kék pedig i-ből 0-ba ha $i > 0$. J'-ben Piros és Kék szerepét felcseréljük. A kezdőpozíció mindkét játékban az 1. Könnyen látszik, hogy bármely pozícióból legfeljebb 2 lépés tehető, így a játékok korlátos lépésszámúak. Azonban $J + J'$-ben megengedett az a játék, hogy Piros a J-beli piros úton megy előre, Kék pedig a J'-beli kéken, így végtelen sok lépést tehetnek. □

Hogy a fenti példát kiiktassuk, mostantól olyan játékokra szorítkozunk, ahol a piros és kék gráf uniója is korlátos lépésszámú. Egy ilyen J játék **negatívja** az a $-J$ játék, amit kék és piros szerepének felcserélésével kapunk.

1.34. állítás. *Tetszőleges J és J' játékokra $J + J' - J'$ ugyanolyan típusú, mint J. Speciálisan, a $J' - J'$ játékban a kezdő veszít.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy Piros kezd, és tekintsük azt a játékost, akinek ebben az esetben J-ben nyerő stratégiája van. Neki $J + J' - J'$-ben a következő stratégiája nyerő: J-ben lép a nyerő stratégiája szerint, kivéve ha a másik játékos J'-ben vagy $-J'$-ben lép, amikor is ő ugyanazt lépi a másikban (**tükör stratégia**). □

1.35. állítás. *Ha Piros kezdése esetén J-ben is és J'-ben is van Kéknek nyerő stratégiája, akkor $J + J'$-ben is van.*

Bizonyítás. Kék mindig abban a játékban válaszol a nyerő stratégiája szerint, ahol Piros lépett. □

Az utóbbi állítás azt sugallja, hogy ha két olyan játékot adunk össze, ahol Kéknek „előnye van”, akkor az összegben is előnye lesz. Ezen fellelkesülve kitűzhetnénk célként, hogy az „előnyt” valamilyen mérőszámmal jellemezzük: ha J-ben Kéknek nagyobb előnye van, mint J'-ben, akkor J-J'-ben Kék nyer. Sajnos ilyen mérőszámot nem lehet minden játékhoz hozzárendelni, mert a „kezdő nyer” és a „kezdő veszít” típusú játékok összehasonlítása nehézségekbe ütközik. Példaként nézzük a piros-kék-zöld sövényvágó játékot. Itt az élek három színnel vannak színezve, és míg a zöld éleket mindkét játékos elvághatja, a piros és kék éleket csak az ugyanolyan színű játékos.

Nézzünk egy 2 hosszú bambuszt, aminek a töve zöld, a teteje piros. A zöld él elvágásával a kezdő nyer, így egyik játékosnak sincs előnye. Ha viszont két ilyen bambuszt teszünk egymás mellé, azaz a játék kétszeresét vesszük, akkor bárki kezd, Piros nyer, tehát Pirosnak van előnye.

A példa mutatja, hogy az előnyt nem lehet egyetlen mérőszámmal jellemezni. Hogy mégis hogyan lehet az előnyt karakterizálni, az kitölti a *Winning Ways for Your Mathematical Plays* könyv egész első kötetét. Ebben a jegyzetben szerényebb célt tűzünk ki: némi bevezetés után meghatározzuk a játékoknak egy olyan családját, ahol mérhető az előny.

1.4.1. Részbenrendezés a játékok ekvivalencia-osztályain

1.36. definíció. $J \succeq J'$, ha $J - J'$-ben Piros kezdése esetén Kék nyer.

Ez a reláció az 1.34 állítás miatt reflexív. Megmutatjuk, hogy tranzitív is.

1.37. állítás. *Ha $J \succeq J'$ és $J' \succeq J''$, akkor $J \succeq J''$*

Bizonyítás. Az 1.34 állítás szerint $J - J''$ ugyanolyan típusú, mint $J - J' + J' - J''$. Mivel $J - J'$-ben és $J' - J''$-ben Piros kezdése esetén Kék nyer, így az 1.35 állítás szerint $J - J' + J' - J''$-ben is. □

1.38. definíció. $J \simeq J'$, ha $J \preceq J'$ és $J \succeq J'$.

Ez ekvivalencia-reláció, ráadásul a 1.35 állítás miatt ha $J \simeq J'$ és $K \simeq K'$, akkor $J + K \simeq J' + K'$. Azonban a $\preceq$ reláció csak részbenrendezést, nem pedig rendezést ad az ekvivalencia-osztályokon, hiszen van olyan J és J' játék, hogy $J \npreceq J'$ és $J \nsucceq J'$. Például ha J a fenti zöld-piros bambusz, J' pedig az üres játék.

Ahhoz, hogy definiáljuk a „jól kezelhető” játékok családját, szükség van egy elsőre redundánsnak tűnő jelölésre. Egy J játék **lépés-reprezentációja** $J = (R, B)$, ahol R azon játékok halmaza, amiket Piros egy lehetséges első lépése után kapunk, B pedig azon játékoké, amiket Kék egy lépésével megkaphatunk. Az alábbi lemma mutatja, hogy ha csak a játék ekvivalencia-osztálya érdekel minket, akkor a reprezentáció leegyszerűsíthető:

1.39. lemma. *Adott egy tetszőleges $J = (R, B)$ partizán játék. Ha $J_R \in R$, $J'_R \in R$, és $J_R \preceq J'_R$, akkor J és $J' = (R \setminus \{J'_R\}, B)$ ekvivalens.*

Bizonyítás. Tekintsük a $J' - J$ játékot. Ha Piros kezd, Kék a tükör stratégiával nyer. Ha Kék kezd, de nem a $J' - J'_R$ pozícióra lép, akkor Piros nyer a tükör stratégiával. Végül ha Kék kezdőként a $J' - J'_R$ pozícióra lép, akkor Piros a $J_R - J'_R$ pozícióra lép, ahonnan a $J_R \preceq J'_R$ feltétel miatt van nyerő stratégiája. □

A lemma szerint Piros lehetséges első lépései közül csak a részbenrendezés szerint minimálisak, míg Kék első lépései közül csak a részbenrendezés szerint maximálisak az érdekesek. Az alábbiakban rekurzívan definiáljuk a **numerikus játékok** családját, ahol, mint majd látjuk, az ekvivalencia-osztályokon rendezés van, és így ekvivalencia erejéig csak egy érdekes lépése van mindkét játékosnak. Jelölje $J \prec J'$ azt, hogy $J \preceq J'$ és $J \nsucceq J'$.

1.4.2. Numerikus játékok

1.40. definíció. A $J = (R, B)$ játék **numerikus**, ha tetszőleges $J_R \in R$ és $J_B \in B$ esetén J_R és J_B numerikus, és $J_B \prec J \prec J_R$.

A rekurzív definíció azért legitim, mert feltettük, hogy a piros és kék gráf uniója korlátos lépésszámú. Érdemes belegondolni, hogy mit jelent a definícióban szereplő egyenlőtlenség: egy numerikus játékban egy játékos bármelyik lépésével csak ronthat a saját helyzetén, azaz minden lépés egy kevésbé előnyös pozícióba visz. Néhány tulajdonság ebből rögtön következik.

1.41. állítás. *Numerikus játékok összege numerikus.*

Bizonyítás. Következik a 1.35 állításból. □

1.42. lemma. *Egy numerikus játék nem lehet „kezdő nyer" típusú.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy Pirosnak kezdőként van egy J_R nyerő kezdő lépése, azaz $J_R \preceq 0$. A definíció szerint Kék tetszőleges J_B kezdő lépésére $J_B \prec J_R$, azaz $J_B \prec 0$, tehát J_B-ben Piros nyer. □

1.43. következmény. *Numerikus játékok esetében $\prec$ egy rendezés az ekvivalencia-osztályokon.*

Bizonyítás. A 1.42 lemma értelmében $J \preceq J'$ és $J \succeq J'$ közül legalább az egyik teljesül. □

Eszerint egy numerikus játék lépés-reprezentációja ekvivalencia erejéig írható $J = (J_R, J_B)$ alakban, hiszen (ekvivalencia erejéig) egyetlen optimális lépése van mindkét játékosnak. A következőkben ennél erősebbet is belátunk: minden J numerikus játékhoz hozzárendelhető egy $v(J)$ szám úgy, hogy

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(J + J') = v(J) + v(J')$
- $v(J) \geq v(J') \Leftrightarrow J \succeq J'$.

1.44. definíció. Egy $J = (J_R, J_B)$ numerikus játék $v(J)$ **értéke** az az egyértelmű $\frac{a}{2^k}$ alakú racionális szám, amire

- k a legkisebb nemnegatív egész, amire létezik a egész szám, hogy $v(J_B) < \frac{a}{2^k} < v(J_R)$,
- a a legkisebb abszolút értékű egész, ami az előző tulajdonságot teljesíti k-val.

Csak a rendezésre vonatkozó állítást bizonyítjuk be, a többit az olvasóra bízzuk.

1.45. tétel. $v(J) \geq v(J') \Leftrightarrow J \succeq J'$.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $v(J) \geq v(J')$ esetén $J \succeq J'$, hiszen ekkor szimmetria okokból $v(J) \leq$ $\leq v(J')$ esetén $J \preceq J'$. Legyen tehát $J = (J_R, J_B)$ és $J' = (J'_R, J'_B)$ olyan numerikus játék, hogy $v(J) = a/2^k \geq a'/2^{k'} = v(J')$. Azt akarjuk belátni, hogy $J - J'$-ben Piros kezdése esetén kék nyer. Indukcióval bizonyítunk a J és J' lépésszám-korlátjának összege szerint, azaz tudjuk, hogy valahány lépés után kapott játékokra már igaz a tétel állítása. Több esetet különböztetünk meg aszerint, hogy mi Piros első lépése.

1. eset: Piros a $J_R - J'$ pozícióba lép, és $J_R \succeq J'_R$. Ekkor Kék léphet a $J_R - J'_R$ pozícióba, ahonnan van nyerő stratégiája.

2. eset: Piros a $J - J'_B$ pozícióba lép, és $J_B \succeq J'_B$. Ekkor Kék léphet a $J_B - J'_B$ pozícióba, ahonnan van nyerő stratégiája.

3. eset: Piros a $J_R - J'$ pozícióba lép, és $J_R \prec J'_R$. Ekkor indukció szerint $v(J') \leq v(J) <$ $< v(J_R) < v(J'_R)$. Legyen $J_R = (J_{RR}, J_{RB})$ és Kék lépjen a $J_{RB} - J'$ pozícióba. Ha $J_{RB} \succeq J'$, akkor Kéknek innen van nyerő stratégiája, feltehető hát, hogy $J_{RB} \prec J'$, és az indukciós feltevés miatt $v(J_{RB}) < v(J')$. Ez azt jelenti, hogy mind $v(J')$, mind $v(J_R)$ szigorúan $\max\{v(J'_B), v(J_{RB})\}$ és $\min\{v(J'_R), v(J_{RR})\}$ között van. Az értéket definiáló szabály szerint ez csak $v(J') = v(J_R)$ esetén lehetséges, de előbb láttuk, hogy $v(J') < v(J_R)$, ellentmondás.

4. eset: Piros a $J - J'_B$ pozícióba lép, és $J_B \prec J'_B$. A bizonyítás analóg a 3. esettel, de a teljesség kedvéért leírjuk. Indukció szerint $v(J_B) < v(J'_B) < v(J') \leq v(J)$. Legyen $J'_B = (J'_{BR}, J'_{BB})$ és Kék lépjen a $J - J'_{BR}$ pozícióba. Ha $J'_{BR} \preceq J$, akkor Kéknek innen van nyerő stratégiája, feltehető hát, hogy $J'_{BR} \succ J$, és az indukciós feltevés miatt $v(J'_{BR}) > v(J)$. Ez azt jelenti, hogy mind $v(J)$, mind $v(J'_B)$ szigorúan $\max\{v(J_B), v(J'_{BB})\}$ és $\min\{v(J_R), v(J'_{BR})\}$ között van. Az értéket definiáló szabály szerint ez csak $v(J) = v(J'_B)$ esetén lehetséges, de előbb láttuk, hogy $v(J) > v(J'_B)$, ellentmondás. □

1.4.3. Piros-kék sövényvágás

A **piros-kék sövényvágó játékban** csak piros és kék élek vannak, és mindkét játékos csak az ő színének megfelelő élt vághat. A piros-kék-zöld sövényvágással ellentétben itt nem lehet, hogy a kezdőnek van nyerő stratégiája. Sőt, megmutatjuk hogy minden piros-kék sövényvágó játék numerikus.

1.46. tétel. *Ha $J = (R, B)$ piros-kék sövényvágó játék, akkor numerikus*

Bizonyítás. Nyilván minden lépés piros-kék sövényvágó játékhoz vezet, ezért azt kell belátni, hogy tetszőleges $J_R \in R$ és $J_B \in B$ esetén $J_B \prec J \prec J_R$. Szimmetria miatt elég belátni, hogy $J_B \prec J$. Tekintsük a $J - J_B$ játékot, és lássuk be, hogy mindenképp Kék nyer. Ha ő kezd, léphet $J_B - J_B$-be, ahol a tükör stratégiával nyer. Az érdekes eset tehát az, amikor Piros kezd. Legyen e az a kék él, aminek a törlésével J-ből J_B-be jutunk. Kék egészen addig alkalmazhatja a tükör stratégiát, amíg piros ki nem töröl egy olyan élt a J-hez tartozó gráfból, aminek a tükörképe $-J_B$-ben nincs benne. Ilyen él csak akkor lehet, ha a J-hez tartozó gráfból e még nem lett törölve. Legye Kék válaszlépése az, hogy törli az e élt. Ekkor újra egymás tükörképe lesz a két gráf, és innen Kék nyer a tükör stratégiával. □

A 1.45. tétel szerint minden sövényvágó játékhoz tartozik egy diadikus tört érték, ami azt méri, hogy Kéknek mennyi előnye van. Felmerül a kérdés, hogy a zöld sövényvágáshoz hasonlóan igaz-e, hogy minden játék ekvivalens egy bambuszligettel. A válasz igen, ráadásul elég csak speciális típusú bambuszokat nézni. Nevezzük P_k-nak azt a k élű bambuszt, aminek alsó éle kék, a többi meg piros. Könnyen ellenőrizhető, hogy $v(P_1) = 1$.

1.47. állítás. *$k \geq 2$ esetén $P_k + P_k$ ekvivalens P_{k-1}-gyel, tehát $v(P_k) = 2^{1-k}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy $k' < k$-ra igaz az állítás. Nézzük a $P_k + P_k - P_{k-1}$ játékot. Ha Piros kezd, akkor Kéknek a következő nyerő stratégiája: ha Piros kivágja $-P_{k-1}$-et, akkor Kék kivágja az egyik P_k-t, és a maradék P_k-n ő nyer. Ha Piros az egyik P_k-ban lép, akkor Kék kivágja a másik P_k-t, és így egy $P_{k'} - P_{k-1}$ játékot kapunk, ahol $k' \leq k - 1$, így a feltevés szerint Kék nyer.

Nézzük mi van, ha Kék kezd. Amíg 3 bambusz van, addig Piros fenn tudja tartani, hogy mindkét kék tövű bambusz szigorúan hosszabb, mint a piros tövű. Ha Kék valamikor kivágja az egyik kék tövűt, akkor $P_{k'} - P_{k''}$-t kapunk valamilyen $k' > k''$-re, amiben már tudjuk hogy Piros nyer. □

Az állítás következménye, hogy minden pozitív diadikus törtre van olyan, csak B_k típusú bambuszokból álló bambuszliget, aminek ez a diadikus tört az értéke. Így minden piros-kék sövényvágó játék ekvivalens egy ilyen (vagy negatív esetben fordított színezésű) bambuszligettel.

Van azonban egy jelentős különbség a zöld sövényvágáshoz képest. Láttuk, hogy ott polinom időben meg is tudtunk konstruálni egy ekvivalens bambuszligetet, így ki tudtuk számolni a játék Sprague-Grundy számát és egy nyerő stratégiát. Piros-kék esetben ez jóval nehezebb.

1.48. tétel. *Piros-kék sövényvágó játékok értékét NP-nehéz kiszámolni.*

A tételt nem bizonyítjuk, csak megjegyezzük, hogy lehet a játékoknak egy olyan családját definiálni, ahol az érték azon múlik, hogy a piros élek részgráfjában mekkora a kék élek végpontjait összekötő legkisebb Steiner fa.

1.5. Pozíciós játékok

Pozíciós játék alatt többfajta játékot értünk, amiknek közös tulajdonsága, hogy a két játékos felváltva foglal el egy mezőt egy alaphalmazból, és az, hogy ki nyer, egy halmazrendszerrel van definiálva.

1.5.1. Erdős–Selfridge tétel

A pozíciós játékok egyik csoportja az **építő–romboló** (angolul maker–breaker) játékok, aminél az egyik játékos, az építő célja a halmazrendszer valamely halmazának elfoglalása, és a másik, romboló játékos nyer, ha ez nem sikerül. A halmazrendszer elemeit **nyerő halmaz**oknak nevezzük. Mivel döntetlen nem fordulhat elő, tudjuk, hogy valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája.

1.49. tétel (Erdős, Selfridge)**.** *Legyen egy építő–romboló játék alaphalmaza U és tegyük fel, hogy a nyerő halmazok $\mathcal{E}$ rendszerére teljesül, hogy $\sum_{X\in\mathcal{E}} 2^{-|X|} < 1/2$. Ekkor a romboló játékosnak van nyerő stratégiája, akár kezd, akár második.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy az építő játékos kezd (miért?). Definiáljuk egy $\mathcal{F} \subseteq 2^U$ halmazrendszer veszélyét a

$$v(\mathcal{F}) := \sum_{X\in\mathcal{F}} 2^{-|X|}$$

számként. (Várhatóan ennyi csupa kék halmaz lesz $\mathcal{F}$-ben, ha X elemeit véletlenszerűen kiszinezzük kékre és pirosra.) A feltétel miatt $v(\mathcal{E}) < 1/2$.

Legyen $A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ az építő első i lépése, $B_{i-1} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}\}$ pedig a romboló játékos első $i-1$ lépése. Az i-edik kör közepétől nézve (amikor romboló következik) a játék szintén egy építő-romboló játék, $U_i := U \setminus (A_i \cup B_{i-1})$ „táblával” és $\mathcal{E}_i := \{X \setminus A_i :\ X \in \mathcal{E},\ X \cap B_{i-1} = \emptyset\}$ nyerő halmazokkal.

Építő az első lépésével néhány halmaz veszélyét a kétszeresére növeli, így az össz-veszélyt mindenesetre legfeljebb kétszerezni tudja, tehát $v(\mathcal{E}_1) < 1$. Azt állítjuk, hogy romboló el tudja érni, hogy mindegyik $\mathcal{E}_i$ rendszer veszélye 1 alatt legyen. Ebből következik, hogy építő nem nyerhet, hiszen az üreshamaz veszélye 1.

Romboló válassza mindig azt a b_i elemet U_i-ből, ami maximalizálja $\sum_{X\in\mathcal{E}_i, b_i\in X} 2^{-|X|}$ értéket. Ekkor

$$v(\mathcal{E}_{i+1}) = v(\mathcal{E}_i) - \sum_{X\in\mathcal{E}_i, b_i\in X} 2^{-|X|} + \sum_{X\in\mathcal{E}_i, a_{i+1}\in X, b_i\notin X} 2^{-|X|} \le v(\mathcal{E}_i),$$

tehát az állítást beláttuk. □

Egy halmazrendszert **2-színezhető**nek nevezünk, ha az alaphalmaz elemeit ki lehet színezni két színnel úgy, hogy ne legyen egyszínű halmaz a rendszerben.

1.50. állítás. *Ha egy $\mathcal{E}$ halmazrendszerre a rombolónak van nyerő stratégiája (második játékosként), akkor 2-színezhető.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy akkor is a romboló nyerne, ha ő kezdene. Játsszon mindkét játékos a romboló stratégiája szerint, és színezzük a pontokat aszerint, hogy ki foglalja el: az építő pontjait kékkel, a romboló pontjait pirossal. Ekkor mindketten elérik, hogy minden $\mathcal{E}$-beli halmazból legyen pontjuk, vagyis a kapott színezés jó 2-színezés. □

1.51. következmény. *Ha egy $\mathcal{E}$ k-uniform halmazrendszerre $|\mathcal{E}| < 2^{k-1}$, akkor $\mathcal{E}$ 2-szinezhető.*

Bizonyítás. Rögtön következik az 1.49. tételből és az 1.50. állításból, hiszen $v(\mathcal{E}) = 2^{-k}|\mathcal{E}| < 1/2$. □

Az 1.49. tétel becslése éles a következő értelemben: van olyan k-uniform, 2^{k-1} elemszámú $\mathcal{E}$ halmazrendszer, amire Építő kezdőként nyer. Tekintsünk ugyanis egy k szintű bináris fát, és legyen $\mathcal{E}$ a teljes ágak (mint csúcshalmazok) által alkotott halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{E}$ k-uniform, $|\mathcal{E}| = 2^{k-1}$, és építő könnyen tud nyerni: kezdő lépésként a gyökeret választja, később pedig mindig az utoljára választott csúcsának egy olyan gyerekét választja, aminek a részfájában Romboló még nem rombolt.

Ha tudunk a k-uniform $\mathcal{E}$ halmazrendszer maximális fokszámára (azaz az egy elemet tartalmazó $\mathcal{E}$-beli halmazok maximális számára) felső becslést mondani, akkor kicsit erősebb tételt is kimondhatunk. Jelölje $\Delta(\mathcal{E})$ a maximális fokszámot.

1.52. tétel. *Legyen egy építő–romboló játék alaphalmaza U és tegyük fel, hogy a nyerő halmazok $\mathcal{E}$ rendszere k-uniform, és teljesül rá, hogy $|\mathcal{E}| + \Delta(\mathcal{E}) < 2^k$. Ekkor a romboló játékosnak van nyerő stratégiája, akár kezd, akár második.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz figyeljük meg, hogy Építő az első lépésben legfeljebb $\Delta(\mathcal{E})$ halmazból töröl egy elemet, tehát az első lépés után a halmazrendszer veszélye legfeljebb

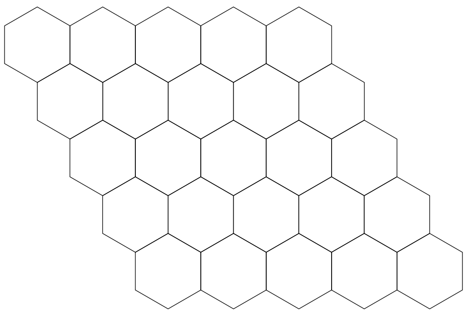
$$(|E| - \Delta(\mathcal{E})) * 2^{-k} + \Delta(\mathcal{E}) * 2^{-k+1} = (|E| + \Delta(\mathcal{E})) * 2^k < 1.$$

Innen a bizonyítás ugyanúgy folytatható, mint az 1.49. tétel bizonyítása. □

1.53. feladat. Mutassuk meg, hogy a 4×4-es táblán játszott amőbában, ahol 4 jel kell egy egyenesen a nyeréshez, a második játékosnak van nem-vesztő stratégiája.

1.5.2. Hex

A következőkben egy konkrét építő–romboló játékot fogunk vizsgálni, amiről első ránézésre nem is látszik, hogy tényleg építő–romboló játék. A **hex** nevű játék egy hatszögrácson folyik, aminek n sora és n oszlopa van (lásd az 5. ábrát). A két játékos, A és B a rács mezőit foglalja el felváltva, úgy, hogy A fekete, B pedig fehér korongot tesz rá (A kezd; és egy mezőt csak egyszer lehet elfoglalni). A akkor nyer, ha keletkezik egy fekete „gyöngysor” (út) a tábla bal szélétől a jobbig, B pedig akkor, ha keletkezik egy fehér út a tábla felső szélétől az alsóig.



5. ábra

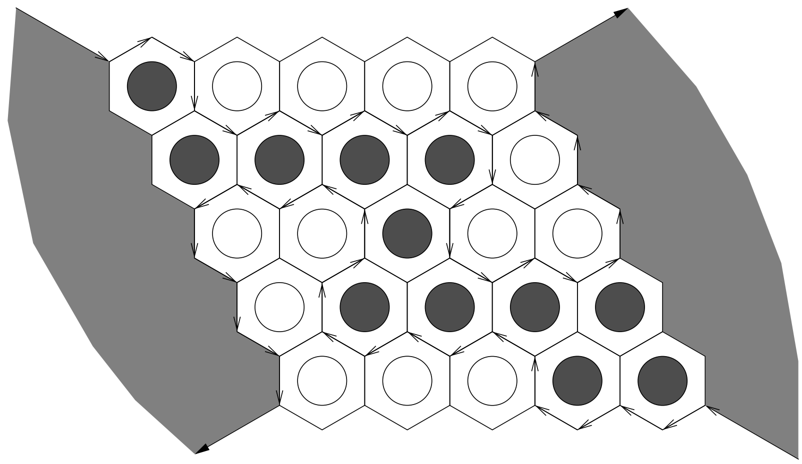
1.54. feladat. Ha hasonló játékot játszanának, csak $n \times n$-es négyzetrácson, akkor mindkettejüknek lenne nemvesztő stratégiája.

1.55. tétel (Nash, Gale)**.** *A hex minden n-re éles játék, vagyis nem lehet döntetlen.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy minden mezőn van korong. Egészítsük ki a táblázatot négy végtelenbe menő éllel az ábra szerint, és színezzük a felső és alsó végtelen tartományokat fehérre, a jobb és bal oldalit pedig feketére. Vegyük a hatszögrács élei és a négy új él közül azokat, amiknek a két oldalán különböző szín van, és irányítsuk meg ezeket úgy, hogy arrafele nézve a baloldal legyen fehér, mint a 6. ábrán.

Ekkor minden pontra vagy nem illeszkedik irányított él (ha a pont körüli mezők egyforma színűek), vagy pont egy él indul ki belőle és egy érkezik be. Tehát ha a bal felső élen elindulunk, akkor végig tudunk követni egy egyértelmű irányított utat, és végül valamelyik kimenő végtelen élen kell távoznunk. Látható, hogy ha a jobb felső élbe érkezünk, akkor A nyert (az út éleire jobboldalt illeszkedő mezők egy fekete összefüggő részt adnak balról jobbra), ha pedig a bal alsóba, akkor B nyert (az út éleire baloldalt illeszkedő mezők egy fehér összefüggő részt adnak fentről le). □

A diszkrét Jordan görbe tételből az is következik, hogy egy teli táblán nem lehet egyszerre egy fehér út alulról felülre és egy fekete út balról jobbra. Erre a tényre nemsokára adunk egy másik bizonyítást, a Brouwer fixpont-tétel segítségével. A Hex tehát valóban építő–romboló játék. Valójában azt láttuk be, hogy a „függőleges” és a „vízszintes” utak halmazai (jobban mondva a tartalmazásra



6. ábra

nézve minimálisak) egymás blokkerei (két halmazrendszer, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egymás blokkere, ha $\mathcal{B}$ a minimális olyan almazokból áll, amik minden $\mathcal{A}$-beli halmazt metszenek, és viszont). Az építő–romboló játékokat úgy is le lehet írni, hogy mindkét játékosnak van egy saját nyerő halmazrendszere, amik egymás blokkerei, és mindkettejük célja egy teljes halmaz elfoglalása a saját halmazrendszeréből.

1.56. tétel (Nash)**.** *A Hexben a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás. Stratégialopással be lehet bizonyítani, az amőbához hasonlóan (1.12. tétel), hiszen itt is szimmetrikus a két játékos szerepe (a táblát 90 fokkal elforgatva). Tegyük fel indirekt, hogy A kezdése esetén B-nek van nyerő stratégiája. Ekkor B kezdőként tud úgy játszani, hogy mindig minden olyan mezőn legyen korongja, amin egy A kezdése esetén játszott nyerő játéka esetén lenne. A játék szabályainak monotonitása miatt így kezdőként B nyerne, ez viszont lehetetlen, hiszen szimmetria miatt ekkor A-nak is lenne kezdőként nyerő stratégiája. □

1.57. megjegyzés. A legnagyobb tábla, amire ismert a nyerő stratégia, a 9×9-es.

Most az 1.55 Tétel segítségével belátjuk Brouwer fixpont-tételét 2 dimenzióban. Később egy kicsit általánosabb alakot is be fogunk látni (2.31 Tétel). Jelölje I a $[-1{,}1]$ intervallumot.

1.58. tétel (Brouwer, 1912)**.** *Ha $f : I^2 \to I^2$ folytonos függvény, akkor létezik $x \in I^2$, amire $f(x) = x$.*

Bizonyítás. A folytonosság miatt elég belátni, hogy tetszőleges $\epsilon > 0$-ra létezik $x \in I^2$, amire $\|f(x) - x\|_\infty < \epsilon$. Tudjuk azt is hogy f egyenletesen folytonos, tehát ϵ-hoz létezik $\delta \le \epsilon$, hogy $\|x - y\|_\infty < \delta$ esetén $\|f(x) - f(y)\|_\infty < \epsilon$.

Elég nagy k-ra egy $k \times k$-as Hex-táblát „beágyazhatunk” I^2-be úgy, hogy a mezők középpontjainak S halmazára a következők teljesüljenek:

– Ha $u \in S$ és $v \in S$ szomszédos mezők középpontjai, akkor $\|u - v\|_\infty < \delta$,

– Ha $u \in S$ egy jobb szélső mező középpontja, akkor $u_1 > 1 - \delta$, baloldali esetén $u_1 < -1 + \delta$, fent $u_2 > 1 - \delta$, lent pedig $u_2 < -1 + \delta$.

Definiáljuk a következő részhalmazait S-nek.

$$\begin{aligned} H^+ &= \{x \in S : f_1(x) - x_1 \ge \epsilon\}, \\ H^- &= \{x \in S : x_1 - f_1(x) \ge \epsilon\}, \\ V^+ &= \{x \in S : f_2(x) - x_2 \ge \epsilon\}, \\ V^- &= \{x \in S : x_2 - f_2(x) \ge \epsilon\}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy H^+ nem tartalmazza jobb szélső mező középpontját, hiszen $x \in H^+$ esetén $x_1 \le f_1(x) - \epsilon \le 1 - \delta$. Hasonlóan, H^- nem tartalmazza baloldali, V^+ fenti, V^- lenti mező középpontját.

1.59. állítás. *H^+ és H^- nem tartalmaz szomszédos mezőket; hasonlóan, V^+ és V^- sem tartalmaz szomszédos mezőket.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u \in H^+$ és $v \in H^-$ szomszédos mezők középpontjai. Ekkor $\|u-v\|_\infty < \delta$, tehát $\|f(u) - f(v)\|_\infty < \epsilon$. Másrészt azt kapjuk, hogy

$$\|f(u) - f(v)\|_\infty \geq (f_1(u) - u_1) + (v_1 - f_1(v)) - (v_1 - u_1)) \geq \epsilon + \epsilon - \delta \geq \epsilon,$$

ami ellentmondás. □

Az állításból és az azt megelőző észrevételből következik, hogy a $H^+ \cup H^-$-beli középpontú mezők nem tartalmaznak balról jobbra utat, és a $V^+ \cup V^-$-beli középpontú mezők nem tartalmaznak fentről le utat. Az 1.55 Tétel szerint így van olyan $x \in S$. ami nincs benne H^+, H^-, V^+, V^- egyikében sem. A definíciók szerint ez azt jelenti, hogy $\|f(x) - x\|_\infty < \epsilon$, amit bizonyítani akartunk. □

A Hex tételből tehát belátható a Brouwer fixpont-tétel. Most megmutatjuk, hogy a Brouwer tételből belátható, hogy nem lehet egyszerre jobbról balra fekete út és fentről le fehér út.

1.60. tétel. *Egy teljesen kitöltött Hex táblán nem lehet egyszerre jobbról balra fekete út és fentről le fehér út.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy vannak ilyen utak. Ágyazzuk be a Hex táblát I_2-be úgy, hogy a fekete út az $x_1 = -1$ oldaltól megy az $x_1 = 1$ oldalig, a fehér út pedig az $x_2 = -1$ oldaltól az $x_2 = 1$ oldalig. Ekkor vannak olyan $h : I \to I_2$ és $f : I \to I_2$ folytonos függvények (az utak paraméterezései), hogy $h_1(-1) = v_2(-1) = -1$, $h_1(1) = v_2(1) = 1$, és tetszőleges $x \in I$, $y \in I$-re $h(x) \neq v(y)$. Definiáljuk a következő $f : I_2 \to I_2$ folytonos függvényt:

$$f(x, y) = ((v_1(y) - h_1(x))/\|h(x) - v(y)\|_\infty, (h_2(x) - v_2(y))/\|h(x) - v(y)\|_\infty).$$

Az indirekt feltétel miatt a nevező sehol sem 0, úgyhogy ez tényleg egy jóldefiniált folytonos függvény. Vegyük észre továbbá, hogy tetszőleges $(x, y) \in I_2$-re $f(x, y)$ az egységnégyzet határán van. Az 1.58 Tétel szerint létezik $(x, y) \in I_2$, hogy $f(x, y) = (x, y)$, és az előbbi észrevétel szerint (x, y) az egységnégyzet határán van, azaz x és y valamelyike ± 1. Tegyük fel, hogy $x = 1$ (a többi eset hasonló, úgyhogy nem írjuk le külön). Mivel fixpontról van szó, $1 = f_1(1, y)$, azaz

$$1 = (v_1(y) - h_1(1))/\|h(1) - v(y)\|_\infty = (v_1(y) - 1)/\|h(x) - v(y)\|_\infty \leq 0,$$

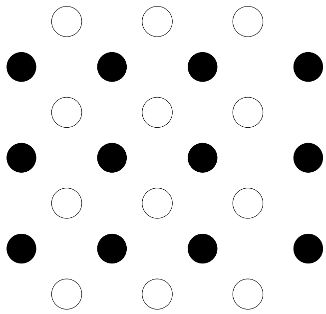
ami ellentmondás. □

1.61. megjegyzés. Vajon mennyire nehéz eldönteni, hogy egy adott teli Hex táblán ki nyert? Ha maga a tábla az input, akkor az 1.55 Tétel bizonyításában szereplő módszerrel ezt könnyen el tudjuk dönteni: végigmegyünk a bal felső éllel induló úton. Érdekesebb a kérdés, ha a tábla kitöltése csak implicit módon van megadva, a következő módon. Tegyük fel, hogy a táblának legfeljebb 2^n mezője van, így a mezők n bittel azonosíthatók. Inputként adott egy $O(n)$ méretű Boole-hálózat n bites inputtal és 1 bit outputtal, ami megmondja, hogy egy adott n bites azonosítóhoz tartozó mező fekete vagy fehér. A Boole-hálózat ismeretében el akarjuk dönteni, hogy melyik játékos nyert. Adler, Daskalakis és Demaine bebizonyították, hogy ez az eldöntési probléma PSPACE-teljes.

1.62. feladat*. Mutasd meg, hogy a hexnek abban a változatában, aminél n sor és $n - 1$ oszlop van, B-nek van nyerő stratégiája!

Egy hasonló játék a Shannon-féle kötő játék vagy kötő–vágó játék, aminél a két játékos egy gráfban választ felváltva egy-egy élt. Kötő célja két rögzített pontot összekötni egy úttal, vágó célja egy vágást elfoglalni. Ezzel a játékkal és matroidos általánosításával matroidelmélet órán vagy Frank András jegyzetében (`http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/matroid/`) meg lehet ismerkedni.

1.63. feladat. A következő játékban a játékosok a 7. ábrán látható táblán kötnek össze szomszédos pontokat szakaszokkal úgy, hogy a szakaszok nem metszhetik egymást. A két szomszédos $\circ$ pontot köthet össze vízszintesen vagy függőlegesen, B pedig két szomszédos $\bullet$ pontot. A célja itt is az, hogy legyen út a tábla felső szélétől az alsóig, B pedig jobbról balra szeretne utat építeni.



7. ábra

a) Bizonyítsd be, hogy A-nak van nyerő stratégiája!

b)* Adj nyerő stratégiát A-nak!

1.64. feladat. Két játékos egy gráfban választ felváltva egy-egy élt, úgy, hogy a kiválasztott éleknek mindig egy utat kell alkotniuk (de mind a két irányba lehet hosszabbítni az utat). Az veszít, aki már nem tud így élt választani. Milyen gráf esetén kinek van nyerő stratégiája?

2. Stratégiai játékok

Az eddig látott kombinatorikus játékok alapvető objektuma a pozíciókat és lépéseket leíró (V, E) irányított gráf volt. Feltételeztük, hogy két játékos van, akik felváltva lépnek. Számos közismert játék nem írható le ebben a keretben: kezdjük a **kő-papír-ollóval**, ami leírható a következő táblázattal.

	Kő	Papír	Olló
Kő	0, 0	-1, 1	1, -1
Papír	1, -1	0, 0	-1, 1
Olló	-1, 1	1, -1	0, 0

A győztes egy, a vesztes mínusz egy pontot kap, a döntetlen nulla pontot ér mindkettejüknek. A táblázat sorai az első, oszlopai a második játékos egyes döntési lehetőségeit jelentik; az egyes pozíciókban levő számpárok elemei az első, illetve a második játékos pontszámát adják meg az adott kimenetelnél. Ezt a táblázatos ábrázolási formát a játék **normál formájának**, **nyereségmátrixának** vagy **kifizetési mátrixának** fogjuk nevezni. Ez egy **véges, determinisztikus, kétszemélyes, nulla-összegű, szimmetrikus, teljes információs, egylépéses, szinkron** játék.

Megadunk egy formális modellt, amit a következőkben **véges stratégiai játék** alatt fogunk érteni.

– Véges sok, n játékos van.

– Az i. játékoshoz adott egy véges S_i halmaz, aminek elemeit a játékos **stratégiáinak** nevezzük.

– A játék egy lehetséges **kimenetele** az, hogy minden játékos választ egyszerre egy-egy stratégiát. A kimenetelek halmaza tehát $S := S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. A kimeneteleket más néven **stratégiaválasztásoknak** hívjuk.

– Feltesszük, hogy a játékosok a kimenetelekhez hozzá tudnak rendelni egy valós számot, hogy mennyi a nyereségük ebben a helyzetben. Az i. játékos nyereségét az $u_i : S \to \mathbb{R}$ **nyereségfüggvény** írja le. A veszteség negatív értékű nyereség, a nulla kimenetel pedig semlegesnek számít. Minden játékos célja a saját nyereségének maximalizálása.

– A játék **egylépéses szinkron**: a játékosok egyszerre választják ki egy-egy stratégiájukat, a többiek döntésétől függetlenül.

– A játék **teljes információs**: minden játékos ismeri az összes S_i halmazt és u_i nyereségfüggvényt.

– A játékelmélet fontos feltételezése a játékosok **racionalitása**. Ebbe beleértjük egyrészt, hogy a játékosok tisztában vannak a saját preferenciáikkal illetve célfüggvényükkel; tisztában vannak saját lehetséges döntéseikkel; arra törekszenek, hogy a célfüggvényüket maximalizálják, és az ehhez vezető lehetséges legjobb döntéseket hozzák a rendelkezésre álló információk alapján.
A racionalitáshoz szorosan kapcsolódó, itt éppen csak érintett fogalom a **racionalitás köztudása**: amellett, hogy a játékosok racionálisak, tudják egymásról is, hogy racionálisak, tudják azt, hogy mindenki más tudja hogy a többiek racionálisak, és így tovább a végtelenségig.

Az, hogy képesnek tekintjük a játékosokat racionális döntés meghozatalára, valójában egy nagyon erős és egyáltalán nem természetes feltevés. A köznyelvben a racionális játék szinonimájaként használt sakkra például egyáltalán nem teljesülnek: a játékosok a borzasztó mennyiségű lehetséges döntésüknek valójában csak egy elhanyagolható szeletét tudják (ráadásul erősen korlátozottan) mérlegelni. Az első számítógépek megjelenésétől kezdve fontos törekvés volt, hogy az ember megverésére képes programot írjanak; a győzelem időpontjának 1997-et szokták hirdetni, amikor az IBM *Deep Blue* gépe legyőzte Kaszparovot. Ez a győzelem leginkább a technológiának, a hatalmasra növelt számítási kapacitásnak köszönhető. A korlátozott racionalitás azonban éppúgy igaz a számítógépekre is, valójában ők is csak egy apró szeletét látják át a lehetőségeknek.

A játék determinisztikussága alatt azt értjük, hogy a játék szabályai közt semmilyen véletlen tényező nem szerepel (ellentétben a kártyajátékokkal); azt viszont meg fogjuk engedni, hogy az egyes játékosok a saját döntésük meghozatalához a véletlent (pl. pénzfeldobás) hívják segítségül.

Egy stratégiai játék **nulla-összegű**, ha a játékosok össznyeresége minden kimenetelnél nulla, tehát egymás kárára tudnak nyerni. Egy kétszemélyes játék **szimmetrikus**, ha a két játékos stratégiáinak a halmaza közt van egy bijekció úgy, hogy felcserélve őket a másik játékos nyereségeit kapjuk.

Véges stratégiai játék mellett végtelennel is fogunk találkozni, amikor a játékosok száma vagy a stratégiahlamazok mérete végtelen.

Megjegyezzük, hogy a kombinatorikus játékok is felírhatók véges stratégiai játékként. Stratégia alatt ott egy olyan függvényt értettünk, amely minden lehetséges pozícióhoz hozzárendel egy lépést. Ha a két játékos a játék kezdete előtt kiválasztja a stratégiáját, onnantól a játék kimenetele tökéletesen determinálva van. Képzelhetjük úgy, hogy a teljesen dokumentált stratégiát a játékosok átadják egy játékvezetőnek, aki utána lépésről lépésre le tudja játszani a játékosok szándékainak megfelelően a játékot és eredményt hirdethet. (A sakk esetén egy ilyen dokumentáció mérete messze meghaladná a világegyetem méretét.) Ugyan a kombinatorikus játékok többlépéses szekvenciális játékok, mégis, a fenti értelemben tekinthetőek egylépéses szinkron játéknak is, ahol az egyetlen döntés a stratégia megválasztása.

A stratégiai játékok elmélete például azt vizsgálja, hogy hogyan választanak a játékosok, ha ésszerűen viselkednek. illetve van-e algoritmikus módszer „jó” stratégia kiválasztására, és egyáltalán, milyen egy jó stratégia?

2.1. Fogolydilemma

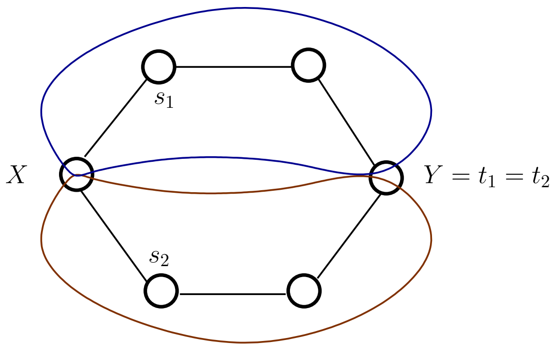
A talán legismertebb játékelméleti problémában a rendőrség letartóztat két bűnözőt, akiket egy súlyos bűntény elkövetésével gyanúsítanak. Tárgyi bizonyíték azonban nincs, beismerő vallomásra lenne szükség. A gyanúsítottakat éjszakára külön cellákba zárják, hogy ne tudjanak összebeszélni. Reggelre kell eldönteniük, hogy vallomást tesznek-e. Ha mindketten tagadnak, akkor gyorshajtásért és visszaeső közterületi alkoholfogyasztásért két évre ítélik őket. Ha mindketten vallomást tesznek, mindketten négy évet kapnak. Ha viszont az egyikük tesz vallomást, a másik tagad, akkor aki tagad, az öt évet kap, hiszen eredeti bűnén felül még hamisan is vallott. A másik is kap azért egy évet, csak a miheztartás végett. A játék nyereségmátrixa tehát az alábbi:

	Vall	Tagad
Vall	-4,-4	-1,-5
Tagad	-5,-1	-2,-2

Érdemes-e valamelyik rabnak tagadnia? Ha a másik vallomást tesz, akkor ő is jobban járna a vallomással: öt helyett csupán négy évet kapna. Szintén jobban járna a vallomással, ha a másik tagad: ekkor kettő helyett csak egy év börtönre ítélnék. Arra juthatunk tehát, hogy mindkét játékosnak inkább vallani érdemes, bármit is választ a másik. Ekkor mindketten négy évet kapnak, vagyis sokkal rosszabbul járnak, mintha egyhangúan tagadtak volna.

A fogolydilemmával a legkülönbözőbb területeken találkozhatunk: valójában a kooperáló és önző magatartásformák viszonyát írja le. Lássunk néhány példát. Tegyük fel, hogy egy kisvárosi piac szabályzata szerint a kofáknak reggel pontban hatkor kell kiírni az árakat, és onnantól nem változtathatnak. Két zöldséges árul krumplit; mindketten 100 forintért szerzik be kilóját. Sokáig mindketten 150 forintért árulják, a vevők fele-fele jár hozzájuk, és mindketten haszonra tesznek szert. Egy ravasz vevő elmagyarázza azonban mindkettőnek, hogy ha másnap 130 forintra vinné le az árat, akkor kevesebb haszna lenne egy kiló krumpliból, de átcsábíthatná a másik összes vevőjét, és így összességében jobban járna. Másnap reggel háromnegyed hatkor mindketten gondterhelten leskelődnek a másik árus felé. Ha ugyanis egyikük megmarad a 150 forintnál, a másik pedig leviszi 130-ra, akkor a 150-es nyakán marad a sok zsák krumpli. Ha végül mindketten a 130 forintot választják, akkor 40%-kal csökken mindkettejük profitja (a vásárlók nagy örömére).

Klasszikus fogolydilemma szituációként szokták leírni a hidegháborús fegyverkezési versenyt. A két játékos Amerika és a Szovjetúnió. Mindketten választhatnak, hogy mekkora összeget fordítanak a fegyverkezésre. Ha csak az egyikük fegyverkezik, a másik pedig nem, vagy alig, akkor az előbbi fegyverrel vagy fenyegetéssel leigázhatja az utóbbit. Ugyanaz marad a politikai helyzet, ha mindketten fegyverkeznek, vagy egyikük sem; viszont az előbbi esetben hatalmas összegeket fognak kifizetni.



8. ábra

Egy informatikai példát szemléltet a 8. ábra. Két szolgáltató van, akik az X és Y pontokban tudják a forgalmat a másik hálózatára átküldeni. A szolgáltatók költsége a saját hálózatukban használt élek száma. Az első szolgáltatónak s_1-ből t_1-be, a másiknak pedig s_2-ből t_2-be kell bizonyos adatmennyiséget továbbítania. Mindketten kétféle utat választhatnak: 2 vagy 4 egység hosszút. A 2 hosszú út teljesen a saját hálózatukon belül megy, a 4 egység hosszúból azonban csak egy él megy a sajátban, három pedig a másikén belül. Az első felel meg az együttműködő, a második az önző magatartásnak. Ha mindketten a rövidebb utat használják, mindkettejük költsége 2; ha mindketten a hosszabbat, akkor a költségük 4. Ha viszont csak az egyik választja a rövidebb utat, a másik a hosszabbat, akkor az együttműködő költsége 5, az önzőé 1. A nyereségmátrix tehát azonos lesz a fogolydilemmában szereplővel. A továbbiakban a fogolydilemmánál a két stratégiát "együttműködőnek" és "önzőnek" fogjuk nevezni:

	Önző	Együttműködő
Önző	-4,-4	-1,-5
Együttműködő	-5,-1	-2,-2

Következő példaként tegyük fel, hogy egy gyanús külvárosi piacon próbálok aranyékszert venni. Az árus eladhat igazi ékszert vagy hamisat, én pedig fizethetek érte igazi vagy hamis pénzzel. Többet nem látjuk egymást: mire kiderül, hogy bóvli az ékszer, már bottal üthetem a nyomát. Érthető okokból ő sem fog a hamis pénz miatt feljelentést tenni. Ha igazi ékszert kapnék igazi pénzért, azzal mindketten jól járnánk; ha viszont a hamisítványért fizetem ki az igazi pénzt, ugyanúgy bosszankodhatok, mint ő, hogyha hamis pénzt adok valódi aranyért. Végül tehát a valószínű kimenet az, amikor mindketten becsapjuk a másikat.

Az előző példa valójában tetszőleges szerződéses viszonyra alkalmazható: ha az egyik szerződő fél felrúgja a megállapodást, a másik pedig tisztességes és teljesíti a kötelességét, az előbbi nagyobb haszonra tesz szert, mintha mindketten tartották volna a megállapodást. Mind a gazdaság, mind a jogrendszer működéséhez szükség van valamiféle olyan nyomásra, ami kikényszeríti a szerződések betartását. Ilyen kényszert jelenthet az állam, aki a hatóságokkal megtoroltatja a törvények és szerződések megszegését. Egy másik kényszerítő tényező a közvélemény ereje: hogyha tisztességtelen az üzleti magatartásom, többet senki nem fog velem üzletelni; ha a társadalmi korlátokat hágom át, kiközösítenek.

Ez utóbbi hatást játékelméleti szempontból az **ismételt fogolydilemma** írja le: tegyük fel, hogy ugyanaz a két játékos egymás után sokszor játsza le a fogolydilemmát. Mint láttuk, egyetlen játék esetén mindenképp az önzés a kifizetődőbb. Ha azonban ezt további játékok követik, azokban a másik játékos bosszút tud állni az árulásért. Az együttműködés jutalma tehát – a pillanatnyi alacsonyabb nyereséggel szemben – a hosszútávú együttműködésből származó haszon. Egy, a gyakorlatban legjobbnak bizonyuló stratégia a **tit-for-tat**: az első játékban együttműködöm, és minden további játékban azt cselekszem, amit ellenfelem az előző játékban. Vagyis ha a másik önző, akkor a következő körben büntetésből én is önző leszek; ha azonban legközelebb együttműködik, akkor megbocsátok neki, és utána én is együttműködöm. Ha mindketten ezt a stratégiát játsszák, akkor végig mindketten együttműködőek lesznek.[1]

Az ismételt fogolydilemma gyakorlati alkalmazására példa a peer-to-peer fájlcserélő rendszerek működése. Itt az egyes felhasználók szeretnének valamilyen tartalomhoz hozzájutni, amit a többiek osztanak meg velük. A kényelmes potyautas stratégia, ha a felhasználók csak letöltenek, és letiltják vagy erősen korlátozzák a feltöltést: hiszen részükről ennek költsége van (sávszélesség, processzorhasználat.) Természetesen ha túl sok a potyautas, a rendszer nem tud működni; ez több korábbi fájlcserélőnél is komoly problémát jelentett.

A Bittorrent megoldása az, hogy a felhasználókat egy ismételt fogolydilemmába kényszeríti bele. Ha le szeretnék tölteni egy fájlt, összesorsolnak néhány tucat másik felhasználóval (peer-ek), akik szintén ugyanezt szeretnék tölteni (és már rendelkeznek valamekkora részével). Közülük néhánnyal kapcsolatot hozok létre. Kezdetben ingyen engednek tölteni; ha azonban már valamekkora résszel rendelkezek, ők is adatot várnak el cserébe. Az együttműködő magatartás az, ha viszonzásként én is engedem őket tölteni, de potyautasként ezt meg tudom tiltani. Erre viszont ők reagálhatnak azzal, hogy nem adnak további adatokat, illetve megszüntetik a kapcsolatot. [2] Lényeges, hogy kisszámú peer-rel tudok csak kapcsolatot létesíteni; ez tudja kivédeni azt, hogy csupa különböző felhasználótól szerezzek valamennyi adatot, majd amikor viszonzást várnának, tovább tudjak állni egy másikhoz.

2.2. Domináns stratégiák

Adott S_i stratégiahalmazok és $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ esetén az $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ stratégiaválasztás **Pareto-optimális**, ha nincsen olyan másik $\mathbf{s}' \in S$ stratégiaválasztás, amivel mindenki legalább annyira jól jár, mint $\mathbf{s}$-sel, és legalább egyvalaki szigorúan jobban jár, azaz $u_i(\mathbf{s}') \geq u_i(\mathbf{s})$, és legalább egy helyen szigorú egyenlőtlenség áll. Ha van ilyen $\mathbf{s}'$, akkor $\mathbf{s}$-et Pareto-szuboptimálisnak hívjuk. Véges játékban könnyen látható, hogy mindig létezik Pareto-optimális stratégiaválasztás.

Ha $z, z' \in S_i$ az i. játékos két stratégiája, akkor azt mondjuk, hogy z **gyengén dominálja** z'-t, ha z-vel mindig legalább olyan jól jár, mint z'-vel, vagyis

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n) \geq u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

a többi játékos összes lehetséges s_j stratégia választása esetén. z **erősen dominálja** z'-t, ha mindig szigorú egyenlőtlenség áll, vagyis a többiek bármely $s_j \in S_j$ $(j \neq i)$ stratégiáira

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n) > u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, z', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Dominált stratégiát racionális játékosnak nem érdemes választani. Egy stratégia **domináns**, ha a játékos összes többi stratégiáját dominálja. A fogolydilemmában az önzés dominálja az együttműködést, tehát az a legjobb stratégiaválasztás, ha mindketten önzőek. Ez azonban egy Pareto-szuboptimális stratégia, hiszen mindketten jobban járnának, ha mindketten együttműködnének. (Ez csak az egyetlen egyszer játszott fogolydilemmára vonatkozik; a k-szor ismételt fogolydilemma esetén bonyolultabb stratégiák is lehetnek. Formálisan azt nevezzük stratégiának, hogy minden $i = 1, \ldots, k$-ra megmondjuk, hogy az előző $i - 1$ játék kimenetelét figyelembe véve hogyan döntünk az i. körben.)

Iterált eliminálás

Az **iterált eliminálás szigorú változata** során amíg van olyan stratégiája valamely játékosnak, amit erősen dominál egy másik stratégiája, a domináltat töröljük. A motiváció az, hogy egy racionális játékos nem választ dominált stratégiát. A **laza változat** hasonló, de minden gyengén dominált stratégiát törlünk (tehát a laza változatnál törlünk esetleg többet). A módszerrel a stratégiák számát gyakran lényegesen redukálhatjuk. Ha a fogolydilemmára alkalmazzuk az iterált eliminálást, akkor egyetlen

[1] Valójában további finomításokra van szükség. Ha pl. mindketten ezt játszák, de az egyikük egyetlen alkalommal véletlen – vagy kommunikációs hiba miatt – önző, akkor utána egy „ő ütött előbb" ördögi körbe kerülnek, ahol körönként felváltva lesz az egyik önző, a másik együttműködő.

[2] Természetesen ezeket a döntéseket helyettem a számítógépemen futó kliensek hozzák; többnyire a tit-for-tat stratégiát alkalmazva. A kliensben beállíthatom a sávszélességi korlátokat, illetve egyes programokban a stratégiát is változtathatom.

kimenetel marad, az, hogy mindketten önzőek. Ez tehát példa arra, hogy az iterált eliminálásnál, még ha csak egyetlen kimenetel is marad, az nem feltétlen Pareto-optimális.

A k-szor ismételt fogolydilemmában az iterált eliminálás laza változata arra vezet, hogy mindketten végig önzőek. Ennek belátásához figyeljük meg, hogy minden olyan stratégiát, ami a k-adik lépésben néha együttműködik, gyengén dominál az a módosított stratégia, ahol csak annyit változtatunk, hogy a k-adik lépésben mindenképp önzők vagyunk. Így az elimináció után csak olyan stratégiák maradnak, ahol a k-adik lépésben mindkét játékos önző. Igen ám, de így a k-adik lépés kimenetele fix, és ezért ugyanígy eliminálható az összes, $(k-1)$-edik lépésben néha együttműködő stratégia. Ezt folytatva végül csak az a stratégia marad mindkét játékosnál, hogy mindig önző.

Ez a levezetés mutatja, hogy a laza iterált eliminálás nem feltétlenül jósolja meg jól a játékosok valós viselkedését: az ismételt fogolydilemmában a valóságban nem szokták a végig önző stratégiát követni. Viszont arra mégis jó a gondolatmenet, hogy jelezze: a játékosok együttműködésére jótékonyan hathat, ha nem tudják előre, hogy pontosan hányszor ismétlődik a játék.

Egy másik példaként nézzük az **adózási játékot**, aminek a következő a normál formája.

adózó \ NAV	ellenőriz	nem ellenőriz
hazudik	1, 3	4, 1
igazat mond	2, 2	3, 3

Itt nem tudunk semmit törölni az iterált eliminálással. Megjegyezzük, hogy lehet konstruálni bármekkora játékot, ahol szintén nem tudunk törölni semmit.

2.1. feladat. Alkalmazd az iterált eliminálást az alábbi játéknál:

1. \ 2.	B	K	J
F	2, 3	0, 2	1, 1
A	1, 1	5, 0	0, 4

Pareto-optimális-e az ésszerű kimenetel?

2.2. feladat. a) Mutasd meg, hogy akármilyen sorrendben töröljük a dominált stratégiákat az iterált eliminálás szigorú változatánál, a megmaradó stratégiák mindig ugyanazok.

b) Adj olyan példát, ahol az iterált eliminálás laza változatánál más sorrendeknél nem ugyanazok a stratégiák maradnak, sőt, a megmaradó táblázat se ugyanaz.

Harmadik példaként tekintsük a következő játékot. Két játékos egymástól függetlenül leír egy papírra egy 1 és 100 közti egész számot, majd összehasonlítják őket. Ha a két szám közt egy a különbség, akkor a kisebb számot választó fizet 1 eurót a nagyobb számot választónak. Ha viszont legalább kettő a különbség, akkor épp fordítva, a nagyobb számot választó fizet 2 eurót a kisebbet választónak. Ugyanakkora számok esetén senki sem fizet a másiknak. A táblázat sorjátékos nyereségét mutatja (az oszlopjátékos nyeresége épp ennek az ellentettje).

	1	2	3	4	5	6	.	.	.	100
1	0	-1	2	2	2	2	.	.	.	2
2	1	0	-1	2	2	2	.	.	.	2
3	-2	1	0	-1	2	2	.	.	.	2
4	-2	-2	1	0	-1	2	.	.	.	2
5	-2	-2	-2	1	0	-1	.	.	.	2
.										
.										
.										
99	-2	-2	.	.	.			1	0	-1
100	-2	-2	.	.	.			-2	1	0

Láthatjuk, hogy ha a sorjátékos legalább négyet mond, akkor minden egyes esetben rosszabbul vagy ugyanúgy jár, mintha egyet mondana. Ugyanez teljesül minden négynél nagyobb választása esetén is, ezeket a stratégiákat tehát nem fogja választani. Hasonlóképpen, az oszlopok közül is az első három kivételével az összes többi eltávolítható. Ezáltal a játékot egy 3×3-as mátrixszal leírhatóra tudtuk visszavezetni. Ebben már nincsenek további dominált stratégiák, elemzéséhez más fogalmakra lesz szükségünk.

2.3. Tiszta Nash-egyensúly

$1 \leq i \leq n$-re jelöljük S_{-i}-vel a $\times_{j \neq i} S_j$ halmazt, vagyis az S_i-től különböző stratégiahalmazok szorzatát. Ennek elemeit **részleges stratégiaválasztásnak** nevezzük: az i játékos kivételével minden játékoshoz ki van jelölve egy stratégia. Egy $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_{-i}$ részleges stratégiaválasztást röviden $\mathbf{s_{-i}}$-vel jelölünk; a $(s_1, \ldots, s_{i-1}, z, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ vektort pedig $(z, \mathbf{s_{-i}})$ rövidíti.

Egy $\mathbf{s_{-i}}$ részleges stratégiaválasztásra az i játékos egy **legjobb válasza** egy olyan z stratégia, amire $u_i(z, \mathbf{s_{-i}})$ maximális. Legjobb válasz persze több is lehet, és ha S_i nem véges, akkor lehet, hogy nincs.

Egy $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ stratégiaválasztás **tiszta Nash-egyensúly**, ha minden i játékos esetén az s_i stratégia legjobb válasz az $\mathbf{s_{-i}}$-re, vagyis ha egyik játékos sem járhat jobban, ha megváltoztatja a stratégiáját, feltéve, hogy a többiek nem változtatnak. Formálisan, minden i játékosra

$$u_i(s_i, \mathbf{s_{-i}}) \geq u_i(z, \mathbf{s_{-i}}) \text{ tetszőleges } z \in S_i\text{-re.}$$

Tiszta Nash-egyensúlyt tudunk keresni a következő módszerrel. A normál formájában minden i játékosra és minden $\mathbf{s_{-i}}$ részleges stratégiaválasztásra jelöljük meg egy * jellel az i minden z legjobb válaszára a normál forma $(z, \mathbf{s_{-i}})$-hez tartozó mezejében az i-hez tartozó számot. Például a fogolydilemmánál a következőt kapjuk:

1. \ 2.	Önző	Együttműködő
Önző	-4*, -4*	-1*, -5
Együttműködő	-5, -1*	-2, -2

Egy stratégiaválasztás pontosan akkor Nash-egyensúly, ha a neki megfelelő mezőben mindegyik számnál van *. Ezesetben tehát az (Önző, Önző) az egyetlen tiszta Nash-egyensúly.

Ha minden játékosnak van domináns stratégiája (mint a fogolydilemmában), akkor azok Nash-egyensúlyt alkotnak. Nézzünk olyan példát, amikor ez nem teljesül. A **nemek harca** játékban egy fiú és egy lány szeretné eldönteni, hogy Quimby vagy Tankcsapda koncertre menjen. A lány inkább a Quimbyt, a fiú inkább a Tankcsapdát szeretné, viszont mindkettejüknek az a legfontosabb, hogy együtt menjenek valahova.

Fiú \ Lány	Quimby	Tankcsapda
Quimby	1*, 2*	0, 0
Tankcsapda	0, 0	2*, 1*

Itt két Nash-egyensúly is van, ha mindketten a Quimbyt vagy mindketten a Tankcsapdát választják. Tegyük most fel, hogy valójában a Quimbyt szeretik mindketten jobban, ez 2-2, a Tankcsapda pedig 1-1 egység örömöt szerez. Ekkor is mindkét azonos választás Nash-egyensúlyban van, annak ellenére, hogy a Tankcsapda egyértelműen rosszabb (Pareto-szuboptimális).

A fogolydilemához hasonló **héja-galamb** játék konfliktushelyzetek modellezését célozza (kocsmai verekedések, háborúk, biológiában az egyedek vetélkedése egy fajon belül stb.). Mindkét félnek két stratégiája van, a provokáló (héja) és a kompromisszumkereső (galamb). A hasznossági mátrix a következő.

	Héja	Galamb
Héja	0, 0	4*, 1*
Galamb	1*, 4*	3, 3

Itt két Nash-egyensúly van, azok, amikor ellentétes szerepeket játszanak: az egyik héja, a másik pedig galamb. A játék másik elnevezése a „gyáva nyúl": helyi vagányok azon játéka, amikor egy keskeny egyenes úton egymással szembe indul két autós. Amelyik előbb félrerántja a kormányt, az gyáva nyúl, gúny és megvetés tárgya. Ha viszont egyik sem rántja félre, akkor két bátor halottal lesz gazdagabb a helyi legendárium.

Az **azonos érmék** játékban ketten egy-egy érmét fejre vagy írásra fordítanak és ha a két érme egyforma, akkor az első kap egy dollárt a másiktól, ha különböző, akkor a második az elsőtől.

1. \ 2.	Fej	Írás
Fej	1*, -1	-1, 1*
Írás	-1, 1*	1*, -1

Látható, hogy ebben a játékban nincs tiszta Nash-egyensúly.

2.3. állítás. *Ha az iterált eliminálás bármely változata egyetlen stratégiaválasztással ér véget, akkor az tiszta Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Ha az eliminálás során az i játékos z stratégiája miatt töröltük egy z' stratégiáját, és ekkor az $\mathbf{s}_{-i}$-beli stratégiák még nem voltak törölve, akkor $u_i(z, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(z', \mathbf{s}_{-i})$. Tegyük fel, hogy a végén $\mathbf{s}$ marad csak és legyen $z \neq s_i$ egy másik stratégiája i-nek. z-ből lépjünk az i azon a stratégiájára, ami miatt töröltük, és így tovább, egészen addig, amíg s_i-be érünk. Eközben az i nyeresége ($u_i(., \mathbf{s}_{-i})$) nem csökkenhetett, emiatt $u_i(z, \mathbf{s}_{-i}) \leq u_i(\mathbf{s})$, tehát $\mathbf{s}$ tiszta Nash-egyensúly. □

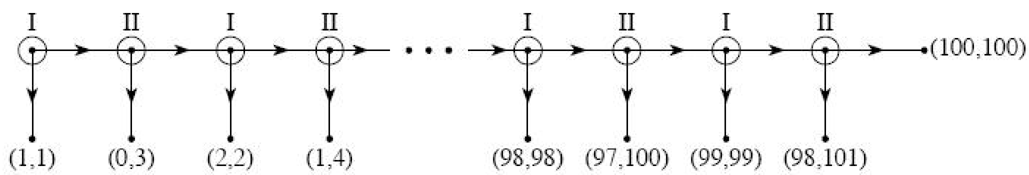
2.4. állítás. *Az iterált eliminálás szigorú változatánál nem törlünk olyan stratégiát, ami szerepel tiszta Nash-egyensúlyban.*

2.5. feladat. Bizonyítsd be a 2.4. állítást!

Kombinatorikus játékoknál egy nyerő stratégia egy olyan stratégia, aminél a játékosnak a nyeresége 1, a másik bármely stratégiájánál, tehát a vesztes játékos bármit választ, -1 a nyeresége. Emiatt a tiszta Nash-egyensúlyok pont azok a stratégiaválasztások lesznek, amiknél a nyerő játékos nyerő stratégiát választ.

Próbálhatnánk azzal a módszerrel tiszta Nash-egyensúlyt keresni, hogy kiindulunk egy tetszőleges stratégiaválasztásból és minden lépésben az egyik játékos válthat stratégiát egy olyanra, aminél többet nyer. Ám ez nem feltétlen talál Nash-egyensúlyt, ugyanis ciklizálhat, akkor is, ha egyébként van Nash-egyensúly, például az adózási játéknál ciklizál, és kiegészíthetjük egy-egy harmadik stratégiával, amik Nash-egyensúlyt alkotnak együtt, de az eredeti részből egyik játékos se akarna átlépni.

A tiszta Nash-egyenúly a játék ésszerű kimenetelét hivatott megfogni. Ám az alábbi **százlábú** játék mutatja, hogy nem minden esetben jósolja meg jól a játékosok viselkedését. A játékot sok lépésesként írjuk le, de ugynúgy, mint a kombinatorikus játékoknál, ez is felírható stratégiai játékként. Két játékos játszik és felváltva lépnek. Először az első játékos dönt, hogy egyből kiszáll, és mindkettőjüknek 1 a nyeresége, vagy folytatódik a játék. Ezután a második játékos vagy befejezi, és az ő nyeresége 3 míg az első játékosé 0, vagy a folytatás mellett dönt. A játék további menete a 9. ábrán látható.



9. ábra

Iterált eliminálással belátható, hogy csak az a Nash-egyensúly, ha mindketten rögtön ki akarnak lépni. Viszont a valóságban inkább folytatják a játékot, reménykedve, hogy a másik is folytatja majd.

2.6. feladat. Egy választáson két jelölt indul, A és B, és a $2k$ választóból k A-t, k B-t preferálja. Ha egy választó kedvence nyer, az neki $+2$-t ér, ha a másik, az -2-t, ha döntetlen, az 0-t. Ha elmegy szavazni, akkor az -1. (Tehát a lehetséges nyereségek -3, -2, -1, 0, 1, 2.) Keresd meg a tiszta Nash-egyensúly(oka)t!

2.7. feladat. Az előző feladathoz hasonló választás, most 3 választóval, akik közül ketten A-t, a harmadik B-t támogatja. Van-e tiszta Nash-egyensúly?

Ismételt játékok

Beszéltünk már az ismételt fogolydilemmáról, de bármely más játékot is játszhatunk többször egymás után. Két változatot fogunk nézni: amikor k-szor ismételjük ugyanazt a J játékot, és amikor minden játék után p valószínűséggel kezdünk egy újabb játékot (és $1-p$ valószínűséggel abbahagyjuk). Utóbbi esetben a nyereségfüggvényt a nyereség várható értékeként definiáljuk.

2.8. tétel. *Legyen N_J a J játék Nash-egyensúlyainak a halmaza. Tekintsük a fenti két változat közül valamelyik ismételt játékot, és legyen s egy olyan stratégia-vektor az ismételt játékban, ahol a j-edik körben a játékosok $s^j \in N_J$ stratégia-vektor szerint játszanak. Ekkor s Nash-egyensúly az ismételt játékban.*

Bizonyítás. Legyen s_i' az i-edik játékos egy alternatív stratégiája, és jelölje $s_i'(j)$ azt, hogy eszerint mit csinál a j-edik körben, ha a többi játékos az s_{-i} stratégia szerint játszik (figyelem, $s_i'(j)$ függhet a többi játékos korábbi lépéseitől!). Mivel $s^j \in N_j$, $u_i(s_i'(j), s_{-i}^j) \leq u_i(s^j)$. Mivel ez minden körben teljesül, $u_i(s_i', s_{-i}) \leq u_i(s)$. □

Lehetnek-e vajon olyan tiszta Nash-egyensúlyok, amik nem a J játék Nash-egyensúlyaiból származnak? Ennek vizsgálatához megint a fogoly-dilemmát nézzük. Először belátjuk, hogy a k-szor ismételt fogolydilemmában minden tiszta Nash-egyensúlyban mindkét játékos minden körben önző. Ez nem azt jelenti, hogy a stratégiájuk az hogy mindenképp önzőek, hanem hogy a stratégiájuknak ez a végeredménye (pl. lehet, hogy mindkettőnek az a stratégiája, hogy először önző és utána Tit-for-Tat-et játszik).

2.9. állítás. *Ha s a k-szor ismételt fogolydilemma Nash-egyensúlya, akkor s szerint játszva a játékosok végig önzőek.*

Bizonyítás. Tegyük fel hogy nem ez a helyzet, és nézzük a legutolsó olyan kört, ahol valamelyik játékos együttműködő. Legyen ez a j-edik kör, és feltehető, hogy az első játékos együttműködő. Ekkor az első játékos jobban jár, ha megváltoztatja a stratégiáját a következőre: a $(j-1)$-edik lépésig ugyanazt csinálja mint s-ben, a j-edik lépéstől kezdve viszont mindenképp önző. Ugyanis a j-edik körben szigorúan jobban jár, és a további körökben sem járhat rosszabbul, hiszen s szerint mindketten önzőek voltak, most meg esetleg a második játékos néha együttműködő, de ez csak növeli az első játékos hasznát. Így ellentmondásba kerültünk azzal, hogy s Nash-egyensúly. □

Most megmutatjuk, hogy ha nem fix az ismétlések száma, hanem mindig p valószínűséggel folytatjuk, akkor elég nagy p esetén Nash-egyensúlyt kapunk, ha mindkét játékos Tit-for-Tat-et játszik. Vegyük észre, hogy ilyenkor mindketten végig együttműködnek, tehát sokkal jobban járnak, mintha végig önzők lennének.

2.10. tétel. *Ha $p \geq 1/3$, akkor Nash-egyensúlyt kapunk, ha mindkét játékos Tit-for-Tat-et játszik.*

Bizonyítás. A játék lépésszámának várható értéke $1+p+p^2+\cdots = 1/(1-p)$. Ha mindketten Tit-for-Tat-et játszanak és így végig együttműködnek, akkor a veszteségük várható értéke $2/(1-p)$. Tegyük fel, hogy az első játékos változtat a stratégián, míg a második továbbra is Tit-for-Tat-et játszik. Azt kell belátnunk, hogy az első játékos várható vesztesége nem csökken. Ha az első játékos új stratégiájával is végig együttműködő, akkor ugyanúgy $2/(1-p)$ lesz a veszteség várható értéke. Feltehető ezért, hogy legalább egyszer önző.

A továbbiakban olyan maximális intervallumokat nézünk, ahol az első játékos végig önző, és belátjuk, hogy minden ilyen intervallumban legalább akkora a vesztesége, mint ha Tit-for-Tat-et játszana.

Ebből már következik a tétel. Legyen az első játékos a $(j-1)$-edik körben együttműködő, utána k körön keresztül önző, a $(j+k)$-adik körben pedig együttműködő. Az első játékos várható vesztesége a j-ediktől a $(j+k)$-adik körig

$$p^{j-1} + 4p^j + \cdots + 4p^{j+k-2} + 5p^{j+k-1},$$

Tit-for-Tat esetén pedig

$$2p^{j-1} + 2p^j + \cdots + 2p^{j+k-1}.$$

A Nash-egyensúlyhoz az kell tehát, hogy

$$\begin{aligned}
p^{j-1} + 4p^j + \cdots + 4p^{j+k-2} + 5p^{j+k-1} &\geq 2p^{j-1} + 2p^j + \cdots + 2p^{j+k-1} \\
1 + 4(p + \cdots + p^{k-1}) + 5p^k &\geq 2 + 2(p + \cdots + p^k) \\
-1 + 2(p + \cdots + p^{k-1}) + 3p^k &\geq 0 \\
(3p-1)(1 + p + \ldots + p^{k-1}) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Ez utóbbi teljesül ha $1/3 \leq p \leq 1$, tehát az első játékos nem járhat jobban, mint a Tit-for-Tat stratégiával. Meg kell nézni még azt az esetet is, amikor valamelyik kör után az első játékos végig önző, de ez adódik a fentiből $k \to \infty$ határátmenettel. □

Az ismételt fogolydilemmát olyan szempontból is érdemes vizsgálni, hogy ha egy populációban különféle stratégiák vannak jelen, akkor hosszútávon mely stratégiák bizonyulnak kifizetődőnek. Tegyük fel, hogy egy populációban kezdetben különböző arányban vannak "mindig önző", "mindig együttműködő", és "tit for tat" típusú egyedek. Egy fázisban mindenki játszik egy ismételt fogolydilemmát (mondjuk p valószínűséggel folytatódót) egy véletlen másik egyeddel a populációból, és ebben a véletlen játékban nézzük a várható hasznát. A nagyobb hasznú stratégiáknak növeljük az arányát a populációban, a kisebb várható hasznúakét csökkentjük, és megismételjük a fázist. Vajon hogyan változik a populáció? Beáll-e egy egyensúly?

Ilyen kérdéseket lehet szórakoztató interaktív formában vizsgálni a `http://ncase.me/trust/` oldalon. A kérdés egyensúlyi vonatkozásiról a 2.10 fejezetben (Evolúciósan stabil kevert stratégiák) lesz szó.

Szennyezési és közlegelő játék

A következő két játék a fogolydilemma sokszereplős általánosításának tekinthető. A **szennyezési játékban** $n > 3$ ország szerepel. Mindegyik kétféle környezetpolitikát alkalmazhat: ha nem korlátozza a szennyezést, az 1 pénzegység kárt okoz - számára, és minden másik ország számára is. A szennyezés visszafogása 3 egységnyi befektetést igényel, ezt csak neki kell kifizetnie. Ha mindegyik ország visszafogja a szennyezést, mindegyiknek 3 lesz tehát a költsége - ha viszont mindenki szennyez, akkor mindenkinek n költséget okoz a szennyezés. Mégis, ez utóbbi forgatókönyv a természetes: ha ugyanis egy ország környezetvédelemről áttér szennyezésre, a többiek pedig nem változtatnak a politikájukon, akkor ez az ország 2-vel csökkenteni tudja a költségét (és közben az összes többiét 1-gyel megemeli). Az egyetlen tiszta Nash-egyensúly az, amikor mindenki szennyez.

A **közlegelők tragédiájában** egy falu legelője tíz tehenet tud eltartani. Tíz gazda legelteti egy-egy tehenét, mindegyik jóllakik és 10 liter tejet ad. Jól mennek a gazdaságok, úgyhogy mindegyik gazdának összegyűlik elég pénze egy második tehén vásárlására. Egy nap egyikük vesz is még egyet: már tizenegyen legelnek. Mostmár kevesebb fű jut minden tehénnek, ezért csak 9 liter tejet adnak. A két tehenet legeltető gazda viszont 18 liter tejhez jut. Általában, ha k tehén van, akkor $20-k$ liter tejet adnak. Ezért mindaddig érdemes egy gazdának új tehenet kihajtani a legelőre, amíg a tehenek száma el nem éri a 18-at. Vagyis a tiszta Nash-egyensúly az lesz, amikor nyolc gazdának van két tehene, két gazdának pedig egy-egy, és minden tehén 2 liter tejet ad. Ekkor összesen 36 liter tejet fejnek sovány, beteg tehenekből, szemben a kiindulási 100 literrel. Míg a szennyezési játékban az egyes játékosok döntéseiből következő költségek egyszerűen összeadódtak, itt ezek a döntések erősen befolyásolják egymást: ha már 8 gazda vett második tehenet, akkor a maradék kettőnek nem érdemes.

Cournot duopólium

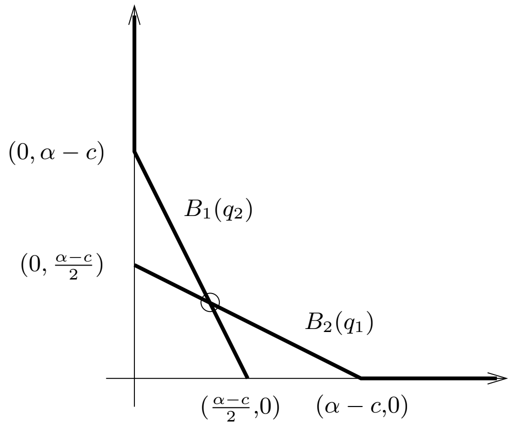
Ebben a játékban két cég megválaszthatja, hogy mennyit gyárt egy adott áruból: tetszőleges $q_i \in \mathbb{R}_+$ lehet a mennyiség ($i = 1, 2$). Itt tehát a stratégiahalmazok kontinuum méretűek. Jelölje $Q := q_1 + q_2$ a két cég által termelt összmennyiséget az áruból. A gyártás egységnyi költsége mindkét cégnek $c > 0$. Egy egységnyi árut $P(Q) := \max\{0, \alpha - Q\}$ forintért tudnak eladni, egy rögzített α paraméterre. Tehát a nyereségfüggvénye az i játékosnak

$$u_i(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2) \cdot q_i - c \cdot q_i = \begin{cases} q_i \cdot (\alpha - q_1 - q_2 - c), & \text{ha } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -q_i \cdot c, & \text{ha } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

A feladat a tiszta Nash-egyensúlyok meghatározása.

Számoljuk ki először, hogy egy adott q_2-re az első cégnek mi a legjobb válasza! Jelöljük ezt $B_1(q_2)$-vel, tehát $B_1(q_2) = \operatorname{argmax}_{q_1 \in \mathbb{R}_+} u_1(q_1, q_2)$. Ha $q_2 \geq \alpha - c$, akkor $P(Q) \leq c$ minden q_1-re, így $u_1(q_1, q_2) \leq 0$ és csak $q_1 = 0$-ra éri el a 0-t. Ha pedig $q_2 < \alpha - c$, akkor az $(\alpha - q_1 - q_2 - c) \cdot q_1$ másodfokú függvény maximuma $q_1 = \frac{\alpha - c - q_2}{2}$-ben van, amire $P(Q) = \alpha - Q$, tehát ez az egyértelmű legjobb válasz.

Összegezve, $B_1(q_2) = \max\{0, \frac{\alpha - c - q_2}{2}\}$, és ugyanígy, a második játékos legjobb válasza q_1-re $B_2(q_1) = \max\{0, \frac{\alpha - c - q_1}{2}\}$.



10. ábra

A tiszta Nash-egyensúlyok azon (q_1, q_2) párok, ahol a $\{q_1, B_2(q_1)\}$ és $\{B_1(q_2), q_2\}$ halmazok metszik egymást. A 10. ábra alapján ez egyetlen pont, méghozzá a $q_1 = q_2 = \frac{\alpha - c}{3}$ pont. Ekkor mindkét cég nyeresége $\frac{(\alpha - c)^2}{9}$.

A játék érdekessége, hogy ha csak egy cég lenne, akkor a nyereségének maximuma $\frac{(\alpha - c)^2}{4}$ lenne, ami több, mint duopólium esetén a két cég össznyeresége. Ráadásul, ha mindkét cég $q_1 = q_2 = \frac{\alpha - c}{4}$-et termel, akkor mindkettőnek több a haszna, mint a Nash-egyensúly esetén. Ez tehát a fogolydilemma egy folytonos rokona, és azt sugallja, hogy a monopólium néha jobb, mint a duopólium.

2.4. Kevert stratégiák, kevert Nash-egyensúly

Vegyük észre, hogy az 1.4. tétel egy Nash-egyensúly létezését bizonyította kombinatorikus játékokra. Azonban általában ez nem garantált: már egy olyan egyszerű játékban sem létezik, mint első példánk, a kő-papír-olló. Valóban érezhető, hogy a „mindig követ játszok" típusú stratégiák nem igazán sikeresek; ezzel szemben jó módszernek tűnik a véletlenre bízni a választást. Ebben a fejezetben a Nash-egyensúly fogalmát terjesztjük ki oly módon, hogy véletlen stratégiaválasztást is megengedünk.

Az i. játékos egy **kevert stratégiája** alatt valószínűségi eloszlást értünk az S_i stratégiahalmazon. Ha S_i véges, akkor ez egy olyan $\sigma : S_i \to \mathbb{R}_+$ vektorral jellemezhető, amelyre $\sum_{z \in S_i} \sigma(z) = 1$. **Tiszta stratégia alatt** az értjük, hogy valamely $z \in S_i$-re $\sigma(z) = 1$ és $\sigma(z') = 0$ ha $z' \neq z$. Ezt χ_z-vel fogjuk jelölni.

Legyen Δ_i az i. játékos kevert stratégiáinak halmaza. Ha S_i véges és $|S_i| = m_i$, akkor Δ_i az m_i dimenziós standard szimplex, vagyis

$$\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^{m_i} : x_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1\}.$$

Legyen $\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n$ a kevert stratégiaválasztások halmaza. Ha a játékosok kevert stratégiái $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta$, akkor az $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ kimenetel valószínűsége

$$p_\sigma(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i).$$

Az $u_i(\sigma)$ **várható nyereség** alatt az i. játékos nyereségének a várható értékét értjük, ha a játékosok a σ kevert stratégiák szerint választanak:

$$u_i(\sigma) = \sum_{\mathbf{s} \in S} p_\sigma(\mathbf{s}) u_i(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{s} \in S} u_i(\mathbf{s}) \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i).$$

Egy kevert stratégiára a várható nyereségeket könnyen ki tudjuk számolni úgy, hogy a kifizetési mátrixba egy új sorként vagy oszlopként írjuk. Például az „azonos érmék” játékban ha az első játékos $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ eséllyel választ fejet vagy írást (vagyis feldob egy szabályos érmét), akkor a következőt kapjuk:

1. \ 2.	F	I
F	1, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1
$\frac{1}{2}$F+$\frac{1}{2}$I	0, 0	0, 0

A kevert stratégiák vizsgálatánál azzal a feltevéssel élünk, hogy a játékosoknak egy x várható nyereségű kimenetel ugyanolyan jó, mint egy x nyereségű tiszta kimenetel. Megjegyezzük, hogy ez egy erős feltevés: ha például $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerünk 1 millió Ft-ot, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig vesztünk ugyanennyit, akkor inkább nem is mennénk bele a játékba.

A $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta$ kevert stratégiák **kevert Nash-egyensúlyban** vannak, ha minden i játékosra

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\gamma, \sigma_{-i}) \quad \forall \gamma \in \Delta_i.$$

Mivel $u_i(\gamma, \sigma_{-i})$ az $u_i(s, \sigma_{-i})$ $(s \in S_i)$ számok konvex kombinációja a γ szerinti együtthatókkal, ezért az egyenlőtlenséget valójában elég megkövetelnünk a tiszta stratégiákra, vagyis σ pontosan akkor van kevert Nash-egyensúlyban, ha minden i játékosra és minden $s \in S_i$ stratégiájára

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\chi_s, \sigma_{-i}).$$

Ebből következik az alábbi állítás.

2.11. állítás. *Legyen* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots s_n)$ *stratégiaválasztás és* $\chi_{\mathbf{s}} = (\chi_{s_1}, \ldots, \chi_{s_n})$ *a neki megfelelő tiszta stratégiák. Ekkor* $\mathbf{s}$ *pontosan akkor tiszta Nash-egyensúly, ha* $\chi_{\mathbf{s}}$ *kevert Nash-egyensúly.*

Egy $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots \sigma_n) \in \Delta_{-i}$ vektort **részleges kevert stratégiaválasztásnak** nevezünk. Egy $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$ részleges kevert stratégiaválasztásra $\gamma \in \Delta_i$-t **legjobb kevert válasz**, ha $u_i(\gamma, \sigma_{-i})$ értéke a lehetséges legnagyobb. A σ kevert stratégia pontosan akkor van Nash-egyensúlyban, ha minden i-re σ_i legjobb válasz σ_{-i}-re.

Minden $z \in S_i$ tiszta stratégiára határozzuk meg $u_i(\chi_z, \sigma_{-i})$-t, a tiszta z stratégia hasznosságát σ_{-i}-vel szemben. Jelölje $Z_{\sigma_{-i}} \subseteq S_i$ azon $z \in S_i$ tiszta stratégiák halmazát, amelyekre $u_i(\chi_z, \sigma_{-i})$ maximális, ezeket az σ_{-i}-re adható **legjobb tiszta válaszoknak** nevezzük. supp(γ)-val jelöljük egy $\gamma \in \Delta_i$ stratégia **tartóját**, azon $z \in S_i$ stratégiák halmazát, melyekre $\gamma(z) > 0$.

2.12. lemma. *Egy* $\gamma \in \Delta_i$ *stratégia akkor és csak akkor legjobb kevert válasz* σ_{-i}*-re, ha supp*(γ) $\subseteq$ $\subseteq Z_{\sigma_{-i}}$*, tehát ha legjobb tiszta válaszokból van „kikeverve”.*

Bizonyítás. Legyen a legjobb tiszta stratégiáknál a várható nyereség X. A γ stratégia várható nyereségét így írhatjuk fel:

$$u_i(\gamma, \sigma_{-i}) = \sum_{z \in S_i} \gamma(z) u_i(\chi_z, \sigma_{-i}) \le \sum_{z \in S_i} \gamma(z) X = X,$$

vagyis egy kevert stratégiával elérhető nyereség legfeljebb annyi, mint a tiszta stratégiákkal elérhető legjobb nyereség. Továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, hogyha $\gamma(z) > 0$ esetén $u_i(\chi_z, \sigma_{-i}) = X$, ami épp az állítással ekvivalens. □

A következő fejezetben belátjuk Nash kulcsfontosságú tételét:

2.13. tétel (Nash, 1951)**.** *Minden véges játékban létezik kevert Nash-egyensúly.*

Nézzünk először néhány példát.

2.14. állítás. *A* **kő-papír-olló** *játék egyetlen kevert Nash-egyensúlya az, amikor* $\sigma_1 = \sigma_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy van másik Nash-egyensúly is; a szimmetria miatt feltehető, hogy $\sigma_1(\text{kő}) \le \sigma_1(\text{papír}) \le \sigma_1(\text{olló})$, és az első vagy második egyenlőtlenség szigorúan teljesül. Azt állítjuk, hogy a második játékos részéről papírt játszani nem tartozik a σ_1-re adható legjobb tiszta válaszok közé. Valóban,

$$u_2(\sigma_1, \chi_{\text{papír}}) = \sigma_1(\text{kő}) - \sigma_1(\text{olló}) < 0,$$

ezzel szemben

$$u_2(\sigma_1, \chi_{\text{olló}}) = -\sigma_1(\text{kő}) + \sigma_1(\text{papír}) \ge 0.$$

Az előző lemma szerint tehát $\sigma_2(\text{papír}) = 0$. De ekkor az első játékos részéről az olló nem legjobb tiszta válasz, mert a kőre és ollóra megszorított játékban a kő erősen dominálja az ollót. Azt kaptuk, hogy $\sigma_1(\text{olló}) = 0$, ami ellentmondás. □

A szarvas-liba-vadászat (angolul **moose-goose-hunt**) nevű játékban n ember mindegyike választhat, hogy beáll a szarvasra vadászó csapatba, vagy elmegy egyedül libára vadászni ($n \ge 2$). A libára vadászók nyeresége c_l, a szarvasra vadászók viszont csak akkor tudják elejteni a szarvast, ha mind az n ember összefog, ekkor a nyereség fejenként c_{sz}, ami több, mint c_l, ha kevesebben mennek szarvasra, akkor 0 a nyereségük. Meg szeretnénk határozni a szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyokat, vagyis az olyan kevert Nash-egyensúlyokat, amiknél mindenkinek ugyanaz a kevert stratégiája. Legyen ez (p_{sz}, p_l).

Ha $p_{sz} = 1$ és $p_l = 0$, akkor mindenkinek c_{sz} a nyeresége, és ha valaki változtat, akkor rosszabul jár, tehát ez Nash-egyensúly. Ha $p_{sz} = 0$ és $p_l = 1$, akkor mindenkinek c_l a nyeresége, és ez is nyilván Nash-egyensúly.

Ha p_{sz} és p_l is pozitív, akkor a 2.12. lemma alapján mindkét tiszta stratégiának legjobb válasznak kell lennie a többiek választására egy i játékos részéről. Ha i a szarvast választja, akkor várható nyeresége $p_{sz}^{n-1} \cdot c_{sz}$, ha libát, akkor c_l, tehát $p_{sz}^{n-1} \cdot c_{sz} = c_l$, vagyis $p_{sz} = \sqrt[n-1]{\frac{c_l}{c_{sz}}}$ és $p_l = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{c_l}{c_{sz}}}$ alkotják a nem tiszta szimmetrikus kevert Nash-egyensúlyt.

Az „azonos érmék” játékban nincs tiszta Nash-egyensúly. Azt állítjuk, hogy az egyetlen kevert Nash-egyensúly, ha mindkét játékos $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ eséllyel választ fejet vagy írást. Világos, hogy a Nash-egyensúlyban egyik játékosnak se lehet tiszta a stratégiája, hiszen akkor a másik játékos legjobb válasza egyértelmű lenne, tehát a másik stratégiája is tiszta lenne, de tiszta Nash-egyensúly nincs.

Mivel ezek szerint mindkét játékos mindkét stratégiát pozitív valószínűséggel választja, mindkét játékos stratégiája rendelkezik azzal a tulajdonsággal, rá a fej is és az írás is legjobb tiszta válasz. Ebből a következő egyenleteket kapjuk, ha az első játékos p valószínűséggel választ fejet, a második pedig q-val:

$$\begin{aligned} -p + (1-p) &= p - (1-p) \\ q - (1-q) &= -q + (1-q). \end{aligned}$$

Ezt megoldva $p = q = 1/2$.

Érdekes játékot kapunk a következő módosítással: ha mindketten fejet választanak, akkor az első játékos nyereménye legyen 1 helyett egymillió dollár (de a második játékos vesztesége továbbra is 1 dollár; vegyük észre, hogy így már nem 0-összegű a játék):

1. \ 2.	F	I
F	10^6, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1

Hogyan változik a kevert Nash-egyensúly? Elsőre azt gondolnánk, hogy az első játékos nagyobb valószínűséggel fog fejet választani, de nem ez történik. Továbbra is igaz, hogy a kevert Nash-egyensúlyban mindkét játékos stratégiája olyan, hogy rá a fej is és az írás is legjobb tiszta válasz. Az ebből adódó egyenletek:

$$-p + (1 - p) = p - (1 - p)$$
$$10^6 q - (1 - q) = -q + (1 - q).$$

Azt kapjuk, hogy $p = 1/2, q = 2/(10^6 + 3)$. Azaz az első játékos továbbra is azonos valószínűséggel választ, míg a második játékos, akinek tulajdonképpen mindegy hogy az első nyer-e egy milliót, nagyon nagy valószínűséggel írást fog választani. A Nash-egyensúlyban az első játékos nyeresége $(10^6 - 1)/(10^6 + 3)$, a második játékos nyeresége pedig 0.

Megjegyezzük, hogy ez a Nash-egynsúly bizonyos értelemben elég instabil. Ugyanis ha a második játékos kicsit megnöveli q értékét (amivel a saját hasznát nem változtatja), azzal eléri, hogy az első játékosnak érdemes legyen növelni p-t. Viszont p növelésével a második játékos is növeli a nyereségét, hiszen ő továbbra is nagy valószínűséggel írást választ. Tehát a második játékos ugyan az első játékos fix stratégiája mellett nem tud javítani, de rá tudja venni az első játékost egy olyan módosításra, ami neki is előnyös. Ilyen jellegű stabilitási kérdéseket a 2.10 fejezetben, az evolúciós egyensúlyok kapcsán fogunk alaposabban vizsgálni.

2.15. feladat. Lássuk be, hogy a héja-galamb játékban a két tiszta Nash-egyensúly mellett még egy harmadik létezik, amikor mindketten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ arányban választanak a héja és galamb stratégia között!

2.16. feladat. Határozzuk meg a 2.2. fejezet végén levő számválasztási játék összes kevert Nash-egyensúlyát!

Iterált eliminálás kevert stratégiákkal

Az iterált eliminálás módszere kiterjeszthető arra az esetre is, amikor a domináló stratégia kevert. Ha például az első játékosnak van olyan σ_1 kevert stratégiája, ami erősen dominál egy $s_1 \in S_1$ stratégiát, akkor s_1-et törölhetjük S_1-ből. Ezt ismételjük, amíg lehet, természetesen bármely játékosra.

2.17. állítás. *Az iterált eliminálás fenti, szigorú változatánál sose törlünk kevert Nash-egyensúlyt, vagyis ha s_1-et töröljük, akkor ő nem szerepel kevert Nash-egyensúly tartójában.*

2.18. feladat. Bizonyítsd be a fenti állítást.

Megjegyezzük, hogy itt is igaz, hogy az iterált eliminálás fenti, szigorú változatánál a végeredmény nem függ a törlések választásától. Az iterált eliminálás laza változatára ez nem igaz, de az alábbi igen:

2.19. állítás. *A laza eliminálás utáni játék kevert Nash-egyensúlya az eredeti játéknak is kevert Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy $s_i \in S_i$ stratégiát töröltünk, mert σ_i' gyengén dominálta; feltehető, hogy s_i nem szerepel σ_i' tartójában. Legyen σ a maradék játék egy kevert Nash-egyensúlya. Ha σ nem Nash-egyensúlya az eredeti játéknak, az csak amiatt lehet, hogy σ_i nem legjobb válasz σ_{-i}-re, hiszen a többi játékos stratégiái legjobb válaszok maradnak. Az i-edik játékos jobb válasza pedig csak s_i lehet, azaz $u_i(\chi_{s_i}, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma)$. De a gyenge dominálás miatt $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq u_i(\chi_{s_i}, \sigma_{-i})$, így $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma)$, ellentmondásban azzal, hogy σ Nash-egyensúly az s_i nélküli játékban. □

2.20. következmény. *Az iterált eliminálás szigorú változatánál (azaz amikor csak erősen dominált stratégiákat törlünk) a kapott játék Nash-egyensúlyai megegyeznek az eredeti játék Nash-egyensúlyaival.*

Bizonyítás. Elég csak egyetlen $s_i \in S_i$ stratégia törlésére bebizonyítani. A 2.17 állítás értelmében s_i nem szerepel Nash-egyensúly tartójában, és a Nash-egyensúlyok nyilván s_i törlése után is teljesítik a Nash-egyensúly feltételeit, így az eredeti játék minden Nash-egyensúlya a törlés utáni játékban is az. A fordított irány a 2.19 állításból következik. □

Példaként nézzük a héja-galamb játék alábbi módosítását, ahol az első játékosnak van egy „karvaly" stratégiája is. A karvaly a héja ellen még rosszabbul jár, galamb ellen viszont jobb:

	Héja	Galamb
Héja	0, 0	4, 1
Galamb	1, 4	3, 3
Karvaly	-1, 1	6, -1

Vegyük észre, hogy például az $5/8G + 3/8K$ kevert stratégia erősen dominálja a H (héja) stratégiát, tehát az első játékos H stratégiáját eliminálhatjuk. A maradék játékban a második játékosnak a H erősen domináns stratégiája, és erre az első játékos legjobb válasza G, így az egyetlen Nash-egyensúly a tiszta (G, H). Vagyis azzal, hogy az első játékos lehetőségeit növeltük, a Nash-egyensúlyok halmazát leszűkítettük az első játékos számára legrosszabbra.

2.21. feladat. Mutasd meg, hogy egy LP feladatként felírható, hogy van-e olyan kevert stratégia, ami dominál egy adott stratégiát.

2.22. feladat. Keresd meg az összes kevert Nash-egyensúlyt az alábbi játékban!

	X	Y	Z
A	3, 4	5, 3	2, 3
B	2, 5	3, 9	4, 6
C	3, 1	2, 5	7, 4

A k-szor ismételt fogolydilemmában korábban kijött, hogy egy tiszta Nash-egyensúlyban mindkét játékos végig önző módon viselkedik. Most belátjuk, hogy ez kevert Nash-egyensúlyokra is igaz.

2.23. állítás. *Ha σ a k-szor ismételt fogolydilemma kevert Nash-egyensúlya, akkor σ szerint játszva a játékosok 1 valószínűséggel végig önzőek.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy valamelyik körben valamelyik játékos pozitív valószínűséggel együttműködik, és legyen az i-edik az utolsó ilyen kör. Feltehető, hogy az első játékos $p > 0$ valószínűséggel együttműködik ebben a körben.

Legyen σ_1' az a stratégia, ami az $(i-1)$-edik körig ugyanaz, mint σ_1, utána pedig mindenképp önző. Ekkor az $(i-1)$-edik körig ugyanaz történik a játékban, mint σ esetén. A második játékos i-edik körbeli kevert stratégiája ugyanaz (σ_1', σ_2) esetén, mint σ esetén, hiszen csak az első $i - 1$ kör eseményeitől függ. Mivel az i-edik körben az első játékos σ_1' szerint a szigorúan domináns stratégiáját játssza, σ_1 szerint viszont p valószínűséggel nem, az i-edik körben szigorúan jobban jár σ_1'-vel mint σ_1-gyel.

Az i-edik kör után σ szerint az első játékos költsége minden körben 4, a σ' szerinti játékban pedig legfeljebb 4, tehát összességében $u_i(\sigma_1', \sigma_2) > u_i(\sigma)$. Ez ellentmond annak, hogy σ Nash-egyensúly. □

Geometriai módszer

A Cournot duopóliumnál geometriai módszerrel határoztuk meg a tiszta Nash-egyensúlyt egy olyan játékban, ahol mindkét stratégiahalmaz a nemnegatív valósak halmaza. Most egy hasonló módszert írunk le, amivel a kevert Nash-egyensúlyokat lehet megkeresni egy kicsi, véges stratégiai játékban. Ha két játékos van és mindkettőnek csak két stratégiája, akkor a síkon ábrázolhatjuk a legjobb válaszokat, és így geometriailag meg tudjuk határozni a kevert Nash-egyensúlyokat. Nézzük példaként a nemek harca játékot!

Fiú \ Lány	Quimby	Tankcsapda
Quimby	1, 2	0, 0
Tankcsapda	0, 0	2, 1

Tegyük fel, hogy a lány y valószínűséggel választja a Quimbyt és $1-y$ valószínűséggel a Tankcsapdát. Mi erre a fiú legjobb válasza? Ha a fiú x valószínűséggel választja a Quimbyt, akkor a várható nyeresége

$$x \cdot y \cdot 1 + (1-x) \cdot y \cdot 0 + x \cdot (1-y) \cdot 0 + (1-x) \cdot (1-y) \cdot 2 = 3xy - 2x - 2y + 2 = x \cdot (3y-2) - 2y + 2.$$

$(x, 1-x)$ akkor legjobb kevert válasz $(y, 1-y)$-ra, ha ez maximális, vagyis

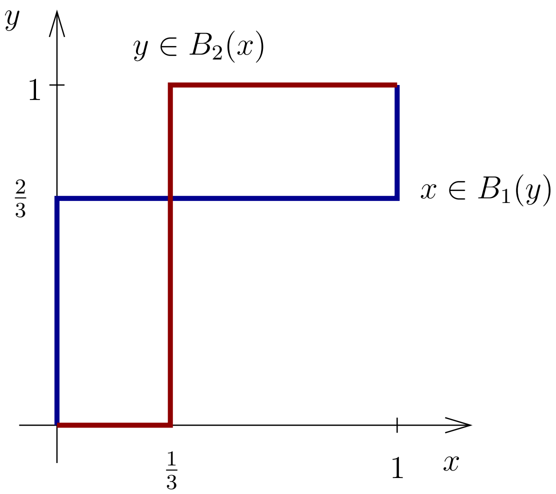
– $3y - 2 > 0$ esetén akkor, ha $x = 1$,

– $3y - 2 < 0$ esetén akkor, ha $x = 0$,

– $3y - 2 = 0$ esetén tetszőleges $x \in [0,1] - re$.

Jelöljük $B_1(y)$-nal ezen x-ek halmazát, tehát amikre $(x, 1-x)$ a fiú részéről legjobb kevert válasz a lány $(y, 1-y)$ kevert stratégiájára.

Ugyanígy meghatározhatjuk azon $(y, 1-y)$ kevert stratégiáit a lánynak, amik a fiú egy $(x, 1-x)$ kevert stratégiájára legjobb kevert válaszok: a lány várható nyeresége $y \cdot (3x-1) - x + 1$, tehát $x > 1/3$ esetén $y = 1$, $x < 1/3$ esetén $y = 0$, $x = 1/3$ esetén pedig tetszőleges $y \in [0, 1]$. Jelöljük $B_2(x)$-szel ezen y-ok halmazát, tehát amikre $(y, 1-y)$ a lány részéről legjobb kevert válasz a fiú $(x, 1-x)$ kevert stratégiájára. Ábrároljuk a síkon a két halmazértékű függvényt!



11. ábra

Egy $((x, 1-x), (y, 1-y))$ kevert stratégiaválasztás pontosan akkor kevert Nash-egyensúly, ha (x, y) benne van a metszetben, vagyis jelen esetben a két tiszta Nash-egyensúlyon kívül van egy harmadik kevert Nash-egyensúly: ha a fiú $1/3$ valószínűséggel a Quimbyt választja, $2/3$ valószínűséggel a Tankcsapdát, a lány meg fordítva.

2.24. feladat. Keresd meg az összes kevert Nash-egyensúlyt a következő jákékokban: azonos érmék, fogolydilemma, héja-galamb játék!

2.25. feladat. A fej vagy írás játék egy változata: két játékos egyszerre mutat 1-est vagy 2-est. Ha az összeg páros, az első játékos nyer a másiktól annyit, amennyi az összeg, ha páratlan, akkor pedig a második.

a) Van-e valamelyik játékosnak olyan kevert stratégiája, aminél a nyereményének várható értéke pozitív, függetlenül a másik stratégiájától?

b) Mi a Nash-egyensúly?

2.26. feladat. Nézzük a legegyszerűbb licitálási játékot: adott n játékos, és egy tárgy, ami az i-edik játékosnak v_i-t ér. A játékosok egymástól függetlenül ajánlanak egy összeget. A legjobb ajánlatot adó kapja a tárgyat, és ki kell fizetnie az ajánlott összeget. Ha többen is ugyanazt licitálják, senki sem kapja meg. Van-e domináns stratégia, vagy tiszta Nash-egyensúly? Mi a helyzet, ha ugyanakkora licitek esetén kisorsolják a tárgyat (ilyenkor persze a haszon várható értékét kell nézni)?

2.27. feladat. A „Chicken” játékban két játékos vezet egymással szemben, és az nyer aki nem tér ki a másik elől. Ha mindkettő kitér, a hasznuk 1, ha egyik sem tér ki, a hasznuk -2, ha pedig csak az egyik tér ki, az ő haszna -1, a másik játékosé pedig 2. Mutassuk meg, hogy ebben a játékban három különböző kevert Nash-egyensúly van.

2.28. feladat. A Chicken játék durvább változatában két játékos vezet egymással szemben, és az nyer aki nem tér ki a másik elől. Ha mindkettő kitér, a hasznuk 1, ha egyik sem tér ki, a hasznuk -1480, ha pedig csak az egyik tér ki, az ő haszna -1, a másik játékosé pedig 2. Mik a kevert Nash-egyensúlyok?

2.29. feladat. Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol az első játékos hasznossági mátrixa A, a másodiké pedig B (mindkettőnél a sorok az első játékos stratégiái):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Számoljuk ki az összes kevert Nash-egyensúlyt.

2.30. feladat. Két játékos választ egy-egy számot az $\{1, \dots, n\}$ halmazból. Ha a két szám különbségének abszolút értéke 1, akkor az első játékos nyer, a második pedig veszít 1-et. Az összes többi esetben egyikük sem nyer. Keressünk Nash-egyensúlyt $n = 7$-re! Nehezebb: keressünk Nash-egyensúlyt tetszőleges n-re.

2.5. Nash-tétel, Sperner-lemma és Brouwer fixpont tétele

Nash egyensúlyi tételének bizonyításához szükségünk lesz Brouwer topológiából ismert fixpont tételére.

2.31. tétel (Brouwer, 1912). *Ha $C \subseteq \mathbb{R}^m$ egy konvex és kompakt halmaz, $f : C \to C$ egy folytonos függvény, akkor létezik olyan $x \in C$, amelyre $f(x) = x$.*

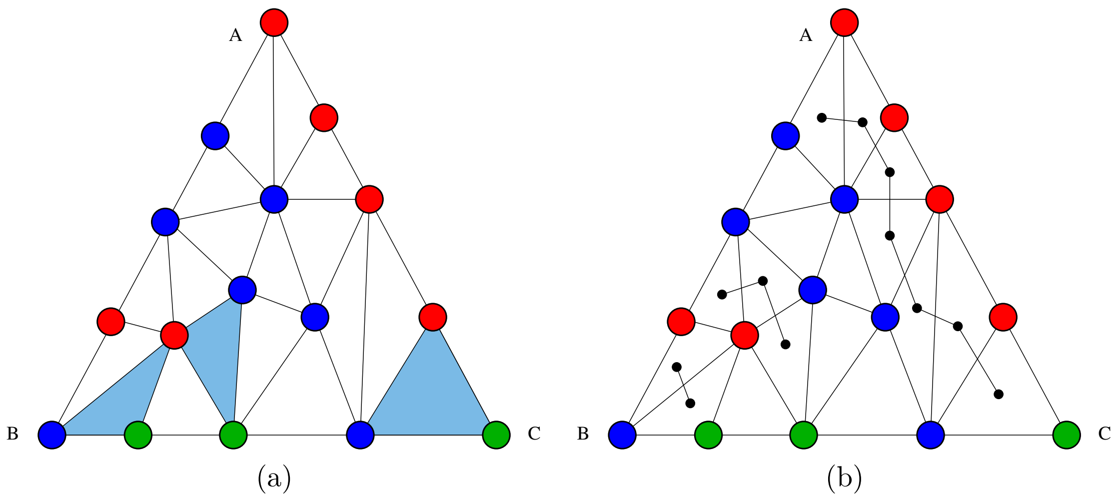
2.32. gyakorlat. Igazoljuk a tételt $m = 1$ esetére!

Brouwer tételének bizonyításához egy kombinatorikai állításra lesz szükségünk. Ezt először $m = 2$ esetére mondjuk ki és igazoljuk. Egy háromszög felosztása kis háromszögekre a következőt jelenti: felveszünk a háromszög oldalain illetve belsejében tetszőleges új pontokat. Ezeket összekötjük egymást nem metsző egyenes szakaszokkal úgy, hogy minden keletkező tartomány háromszög legyen. Minden szakaszra pontosan két háromszög illeszkedik, kivéve az oldalakon levő szakaszokat, amelyekre egy.

2.33. lemma (Sperner, 1927). *Legyen adott egy ABC háromszög tetszőleges felosztása kis háromszögekre. A kis háromszögek összes csúcsa ki van színezve a piros, kék és zöld színek egyikével, a következő szabályok szerint. A piros, B kék, C zöld; az ABC háromszög oldalain levő pontok a két végpont színének az egyikével vannak kiszínezve. Ekkor páratlan sok olyan kis háromszög létezik, amelynek mindegyik csúcsa különböző színű.*

Bizonyítás. Nevezzük tarkának egy olyan háromszöget, amelynek a három csúcsa különböző színű. Definiálunk egy $H = (T, F)$ gráfot, melynek csúcsai az olyan háromszögek, amelyeknek legalább egy csúcsa piros és legalább egy kék. Két háromszögnek megfelelő csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha van közös oldaluk, amelynek az egyik végpontja piros, a másik kék (ld. 12(b) ábra)

Vegyük észre, hogy H-ban minden csúcs foka nulla, egy vagy kettő. Egy nem tarka T-beli háromszög foka egy, ha az egyik piros-kék oldala a nagy háromszög AB-oldalára esik (ezek száma legyen p); a többi nem tarka T-beli háromszög foka kettő. Egy tarka T-beli háromszög foka hasonló módon nulla vagy egy. A nulladfokú tarka háromszögek száma legyen q, az elsőfokúaké r.



12. ábra

Az AB oldalon páratlan sok piros-kék szakasz van, hiszen A-ból B felé haladva az osztópontokon páratlan sokszor változik a szín. Legyen ezek száma $2a+1$. Ekkor $p+q=2a+1$, mivel minden ilyen élre illeszkedik egy T-beli háromszög, amely vagy nem tarka, vagy tarka.

H-ban a páratlan fokú pontok száma $p+r$, ez páros kell legyen; legyen $p+r=2b$. (H valójában utakból, körökből és izolált pontokból áll.) A tarka háromszögek száma ekkor

$$q+r=(2a+1-p)+(2b-p)=2(a+b-p)+1, \tag{3}$$

valóban páratlan. □

A lemmát általánosítjuk magasabb dimenzióra is. m-dimenziós **szimplex** alatt az $\mathbb{R}^m$ térben $m+$ $+1$ általános pont konvex burkát értjük (olyan pontok, melyek nem esnek bele $(m-1)$-dimenziós hipersíkba). Egy m-dimenziós szimplex **lapjai** $(m-1)$-dimenziós szimplexek, amelyeket egy csúcs elhagyásával kaphatunk. (Az 1-dimenziós szimplexek éppen a szakaszok, a 0-dimenziósak a csúcsok voltak).

A szimpliciális felosztás a háromszögekre való felosztás általánosítása lesz. Legyen adott egy m-dimenziós szimplex. Ennek határán és belsejében felveszünk tetszőleges új pontokat; majd felveszünk rájuk illeszkedő $(m-1)$-dimenziós szimplexeket úgy, hogy azok ne messék egymást, és a végén keletkező tartományok mind m-dimenziós szimplexek legyenek. Ezeket „kis szimplexeknek” fogjuk nevezni. Egy színezett csúcsú szimplexet tarkának nevezünk, amennyiben minden csúcsa különböző színű.

2.34. lemma (Sperner, 1927)**.** *Vegyük az $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$ pontok által kifeszített m-dimenziós Δ szimplex egy tetszőleges szimpliciális felosztását. A felosztásban szereplő csúcsokat színezzük ki az $1,2,\dots,m+1$ színekkel úgy, hogy az A_i csúcs az i színt kapja, továbbá az S lapjaira eső pontok a lapon levő csúcsok egyikének színét kapják. Ekkor a felosztásban páratlan sok tarka kis szimplex van.*

Bizonyítás. m szerinti indukcióval bizonyítunk. Az $m=1$ eset triviális; a 2.33. lemma az $m=2$ esetre bizonyít. Lényegében ugyanazt a bizonyítást ismételjük el.

Legyen T azon kis szimplexek halmaza, amelyeknek a csúcsain az $1,2,\dots,m$ színek mindegyike szerepel. Egy ilyen szimplex vagy tarka, vagy valamelyik $1 \le j \le m$ szín kétszer szerepel, mindegyik más szín pontosan egyszer. Egy $(m-1)$-dimenziós szimplexet m-tarkának nevezünk, ha tarka, és csúcsain éppen az $1,2,\dots,m$ színek szerepelnek.

Definiáljuk a $H=(T,F)$ gráfot úgy, hogy két szimplexet akkor kötünk össze, ha van közös m-tarka lapjuk. Vegyük észre, hogy egy tarka szimplexnek pontosan egy m-tarka lapja van, egy nem tarka T-belinek pedig kettő. Egy m-tarka lapra pontosan két T-beli szimplex illeszkedik, ha a lap Δ-n belül helyezkedik el, és 1, ha Δ egyik lapján. A színezés tulajdonsága alapján Δ egyetlen olyan lapja, amely m-tarka szimplexet tartalmazhat, az $A_1,\dots,A_m$ pontok által kifeszített $(m-1)$-dimenziós Δ' szimplex.

Tekintsük ezt az Δ' lapot! Az eredeti m-dimenziós felosztás ezen egy $(m-1)$-dimenziós felosztást ad meg; ebben a tarkák éppen az m-tarka szimplexek. Az indukció szerint páratlan sok ilyen van, legyen a számuk $2a+1$. Közülük mindegyikre illeszkedik egy T-beli m-dimenziós szimplex; legyen ezek közül a tarkák száma q, a nem tarkák száma p, vagyis $p+q=2a+1$. Ezek fokszáma H-ban 0 illetve 1 lesz.

A maradék tarka szimplexek száma legyen r; ezek foka H-ban 1 lesz. A többi T-beli szimplex foka 2; ezek tehát azok, akik nem tarkák, és nincsen Δ'-re illeszkedő m-tarka lapjuk.

A 2.33. lemma bizonyításához hasonló érveléssel H-ban az elsőfokú pontok száma páratlan: $p+r = 2b$, innen (3) alapján következik, hogy a tarka szimplexek száma, $q+r$, páratlan. Ezzel a bizonyítás befejeződött. □

A 2.31. tétel bizonyítása. Csak arra az esetre bizonyítunk, amikor C egy m-dimenziós szimplex. Ebből itt nem részletezett topológiai megfontolások alapján következik az állítás tetszőleges konvex kompakt halmazokra. Jelöljük S-sel C felszínét, azaz lapjainak unióját! Tegyük fel indirekten, hogy a leképezésnek nincs fixpontja: $x \neq f(x)$ tetszőleges $x \in C$-re. Minden $x \in C$-re tekintsük az $f(x)x$ félegyenest, és legyen $T(x)$ az a pont, ahol ez S-t metszi! (Ha $f(x) \in S$, akkor $T(x)$-et a félegyenes S-sel vett másik metszéspontjaként definiáljuk.)

Ezáltal definiáltunk egy $T : C \to S$ leképezést. Ha $x \in S$, akkor világos, hogy $T(x) = x$. Könnyen látható továbbá, hogy ha f folytonos volt, akkor T is az. Színezzük most ki C minden pontját az $1,2,\ldots,m+1$ színekkel úgy, hogy x a $T(x)$-hez legközelebbi A_i csúcs i színét kapja. Ha több csúcstól egyenlő távolságra van, válasszunk ezek közül tetszőlegesen. Teljesülnek a Sperner-lemma színezési feltételei: minden A_i csúcs színe i lesz, és C minden lapján a pontok e lap valamelyik csúcsának színét kapják.

Válasszunk egy „kicsi” $\varepsilon > 0$-t! Ehhez T folytonossága miatt létezik olyan δ, hogy ha $d(x,y) < \delta$ akkor $d(T(x),T(y)) < \varepsilon$. ($d(x,y)$ az x és y pontok távolságát jelöli.) Készítsünk el C-nak egy olyan szimpliciális felbontását, amelyben bármely kis szimplex átmérője (pontjai közt fellépő legnagyobb távolság) kisebb δ-nál!

A Sperner-lemma szerint van egy tarka szimplex: legyenek ennek csúcsai $x_1,\ldots,x_{m+1}$, amelyek rendre az $1,2,\ldots,m+1$ színekkel vannak kiszínezve. Ezen csúcsok közül bármely kettő távolsága kisebb δ-nál, ezért a $T(x_1),\ldots,T(x_{m+1})$ pontok közül bármely kettő távolsága kisebb ε-nál. Mivel mindegyik pont a C szimplex felszínén, S-en helyezkedik el, ezért van egy olyan C' lapja C-nak, hogy az $x_1,\ldots,x_{m+1}$ pontok mindegyike vagy C'-n, vagy ettől legfeljebb ε távolságra helyezkedik el. Legyen A_i a C'-n nem szereplő csúcs! Ekkor megfelelően kicsi ε-t választva ellentmondásra jutunk azzal, hogy $T(x_i)$-hez az A_i csúcs volt legközelebb. □

Készen állunk a Nash-tétel bizonyítására.

A 2.13. tétel bizonyítása. A kevert stratégiaválasztások halmaza, $\Delta = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i$ az $m = \sum_i m_i$ dimenziós tér egy konvex, kompakt részhalmaza. Ezen szeretnénk egy folytonos f függvényt definiálni, melynek fixpontjai éppen a kevert Nash-egyensúlyoknak felelnek meg.

Legyen $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in \Delta$ egy kevert stratégiaválasztás. Az i. játékos egy $z \in S_i$ stratégiájára legyen
$$\sigma'_i(z) := \sigma_i(z) + \max(0,\ u_i(\chi_z,\sigma_{-i}) - u_i(\sigma)),$$
vagyis ha z-vel i jobban jár, mint σ_i-vel, akkor növeljük a z valószínűségét. Ekkor viszont σ'_i már nem lesz valószínűségi eloszlás, tehát normalizálnunk kell (egy x nemnegatív vektor normalizáltja a $\mathrm{nrml}(x) := x/\sum x_i$):
$$f(\sigma) := (\mathrm{nrml}(\sigma'_1), \mathrm{nrml}(\sigma'_2), \ldots \mathrm{nrml}(\sigma'_n)).$$

Könnyen látható, hogy $f : \Delta \to \Delta$ folytonos függvény. A 2.31. tétel szerint létezik egy $\sigma \in \Delta$, amelyre $f(\sigma) = \sigma$. Azt állítjuk, hogy ez egy kevert Nash-egyensúly, sőt a pontosan a fixpontok a kevert Nash-egyensúlyok. Ehhez azt kell belátnunk, hogy minden i játékosra
$$\sigma_i = \mathrm{nrml}(\sigma'_i) \iff \forall z \in S_i : u_i(\chi_z,\sigma_{-i}) \le u_i(\sigma).$$

A „$\Longleftarrow$” irány világos. A „$\Longrightarrow$” irányhoz vegyük észre, hogy mindig van olyan z, amire $u_i(\chi_z,\sigma_{-i}) \le u_i(\sigma)$. Ha indirekten lenne olyan z', amire $u_i(\chi_{z'},\sigma_{-i}) > u_i(\sigma)$, akkor a normalizálásnál 1-nél nagyobb számmal osztunk, ezért az előző z-re $\mathrm{nrml}(\sigma_i'(z)) < \sigma_i(z)$ lenne, ami ellentmond a feltevéssel. □

A feltételek közül a végesség nem hagyható el, ahogy az alábbi példa is mutatja. Tegyük fel, hogy két játékos árul egy adott terméket, amire három potenciális vevő van (A, B és C). Mindhárman egy egységet szeretnének venni, és legfeljebb egy egységnyi pénzt fizetnek érte. A mindenképpen az első játékostól vásárol, B mindenképpen a másodiktól, C pedig attól, aki olcsóbban adja; egyenlőség esetén azonban az első játékost preferálja.

Csak diszkrét eloszlásokkal akarunk foglalkozni, ezért tegyük fel, hogy a termék lehetséges árai $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}$ pozitív egész k-ra. Ekkor egy kevert stratégia-vektor egy $(\{p_k\}_{k=1}^{\infty}, \{q_k\}_{k=1}^{\infty})$ sorozat-pár, amire $p_k \geq 0$, $q_k \geq 0$ minden k-ra, és $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$. Az első játékos p_k valószínűséggel választja árnak $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}$-t, a második játékos pedig q_k valószínűséggel, egymástól függetlenül.

2.35. állítás. *A fenti játékban nincsen kevert Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $(\{p_k\}_{k=1}^{\infty}, \{q_k\}_{k=1}^{\infty})$ Nash-egyensúly. Az alábbi állítások egyszerű számolással kijönnek, ha megnézzük, hogy egy játékos tud-e nyerni azzal, hogy valamelyik p_k (illetve q_k) valószínűséget lecsökkenti 0-ra, és p_{k-1}-et vagy p_{k+1}-et pedig ugyanennyivel megnöveli.

(i) ha $k > 1$ és $p_k > 0$, akkor $q_k \geq \frac{1}{2^{k-1}+1}$

(ii) ha $p_k > 0$, akkor $q_{k+1} \leq \frac{1}{2^k+1}$

(iii) ha $k > 1$ és $q_k > 0$, akkor $p_{k-1} \geq \frac{1}{2^{k-1}+1}$

(iv) ha $q_k > 0$, akkor $p_k \leq \frac{1}{2^k+1}$.

Ha $k > 1$, akkor (i) miatt $p_k > 0$ esetén $q_k > 0$, (iii) miatt pedig $p_{k-1} > 0$. Tehát vagy p_k minden k-ra pozitív, vagy létezik egy K szám, hogy $p_k > 0 \Leftrightarrow k \leq K$. Előbbi esetben $k > 1$ esetén $q_k > 0$, utóbbi esetben pedig $q_k > 0$ ha $1 \leq k \leq K$, és $q_k = 0$ ha $k > K + 1$.

Mivel (ii) miatt $k > 1$ esetén $q_k \leq \frac{1}{2^{k-1}+1}$, csak úgy kaphatunk összegként 1-et, ha $q_1 > 0$, amiből (iv) miatt $p_1 \leq \frac{1}{3}$. Másrészt (i) és (iv) együtt azt adja, hogy $k > 1$ esetén $p_1 \leq \frac{2^{k-1}+1}{2^k+1} q_k \leq \frac{3}{5} q_k$, ezért $\sum_{k=2}^{\infty} p_k \leq \frac{3}{5}$, ellentmondásban azzal, hogy $p_1 \leq \frac{1}{3}$ és $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. □

A Nash-tételre adható egy másik bizonyítás, ami a Brouwer fixpont-tétel helyett a következő, bonyolultabb fixpont-tételt használja.

2.36. tétel (Kakutani). *Ha $C \subset \mathbb{R}^m$ kompakt, konvex, nem üres halmaz, és $f : C \to 2^C$ olyan halmazértékű függvény, amire teljesülnek a következők:*

- *minden $x \in C$-re $f(x)$ konvex, nemüres halmaz,*
- *f grafikonja zárt, vagyis ha $\{x_j\}$ és $\{y_j\}$ konvergens sorozatok, amikre $y_j \in f(x_j)$, akkor $\lim y_j \in \in f(\lim x_j)$.*

Ekkor f-nek van fixpontja, vagyis olyan $x \in C$, hogy $x \in f(x)$.

A Nash-tétel bizonyítása a Kakutani-tétellel. Legyen $C = \Delta$, azaz a kevert stratégia-vektorok halmaza. Ez szimplexek direkt szorzata, tehát kompakt és konvex. Az f halmazértékű függvényt úgy definiáljuk, hogy $\sigma \in \Delta$-ra $f(\sigma)_i$ a σ_{-i}-re vonatkozó legjobb válaszok halmaza (azaz a legjobb tiszta válaszok konvex burka, tehát nemüres, konvex zárt halmaz). Be kell még látnunk, hogy f grafikonja zárt. Mivel egy $\lim y_j$ tartójában lévő stratégia végtelen sok y_j tartójában benne van, ezért végtelen sok x_j-re legjobb tiszta válasz, így $\lim x_j$-re is legjobb tiszta válasz.

A Kakutani-tétel szerint létezik $\sigma \in \Delta$, amire $\sigma \in f(\sigma)$. Ez pont azt jelenti, hogy minden i-re σ_i legjobb válasz σ_{-i}-re, tehát σ Nash-egyensúly. □

Egy n játékosos játékot akkor nevezünk szimmetrikusnak, ha $S_1 = S_2 = \cdots = S_n$ és a játékosok minden π permutációjára $u_i(s_1, \ldots, s_n) = u_{\pi(i)}(s_{\pi(1)}, \ldots, s_{\pi(n)})$. Egy σ kevert Nash-egyensúly szimmetrikus, ha $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$.

2.37. feladat. Bizonyítsd be, hogy szimmetrikus játéknak van szimmetrikus kevert Nash-egyensúlya!

2.38. feladat. Mik a szimmetrikus Nash-egyensúlyok abban a szimmetrikus játékban, ahol az első játékos hasznossági mátrixa I_n? Van-e nem-szimmetrikus Nash-egyensúly?

2.6. Maximin stratégia

Nézzünk most egy paranoid játékost, aki azt feltételezi, hogy a többiek meg fogják tudni a kevert stratégiáját, ráadásul az egyetlen céljuk hogy neki ártsanak. Játékosunk arra kíváncsi, hogy ilyen zord körülmények között milyen kevert stratégiával tudja a legnagyobb várható nyereséget elérni. Máshogy fogalmazva: olyan kevert stratégiát akar választani, ami maximalizálja a többi játékos stratégiaválasztására nézve lehető legkisebb várható nyereségét. Az ilyen kevert stratégiát **maximin stratégiának** nevezzük. Formálisan $\sigma_i \in \Delta_i$ maximin stratégiája az i-edik játékosnak, ha

$$\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq \min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\gamma, s_{-i})$$

minden $\gamma \in \Delta_i$ kevert stratégiára. A $\min_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(\sigma_i, s_{-i})$ értéket az i-edik játékos **biztonsági szint**jének nevezzük. Fontos, hogy várható értékről van szó, azaz nem garantált, hogy ennyi nyereséget elér, de bármi is a többi játékos stratégiája, garantáltan legalább ennyi a nyereség várható értéke.

Ha minden játékos maximin stratégiát játszik, az nem feltétlenül Nash-egyensúly. Tekintsük például a héja-galamb játékot. Ha galamb stratégiát választunk, garantáltan legalább 1 a nyereségünk, és ennél jobbat semmilyen más kevert stratégia nem tud garantálni, sőt, minden más stratégia esetén szigorúan kisebb lesz a nyereség, ha a másik játékos a héja stratégiát választja. Így a tiszta galamb az egyetlen maximin stratégia, de mint láttuk, a (galamb,galamb) nem Nash-egyensúly. A következő fejezetben viszont meg fogjuk mutatni, hogy *0-összegű* kétszemélyes játékok esetén a maximin stratégiák Nash-egyensúlyt adnak.

Számoljuk ki a két játékos maximin stratégiáját a korábban már vizsgált módosított fej-vagy-írás játékban is:

1. \ 2.	F	I
F	10^6, -1	-1, 1
I	-1, 1	1, -1

Tegyük fel, hogy az első játékos p valószínűséggel választ fejet. Ha a második fejet választ, akkor az első nyeresége $10^6p - (1-p)$, ha pedig írást, akkor $-p + (1-p)$. Az első játékos biztonsági szintje tehát $\max_p \min\{10^6p-(1-p), -p+(1-p)\}$ (világos, hogy itt elég a második játékos tiszta stratégiáit tekinteni). Azt látjuk, hogy $0 \leq p \leq 2/(10^6+3)$ esetén $10^6p - (1-p)$ a kisebb és monoton nő, $2/(10^6+3) \leq p \leq 1$ esetén pedig $-p + (1-p)$ a kisebb és monoton csökken. A maximum tehát $p = 2/(10^6+3)$-ban vétetik fel, a biztonsági szint $(10^6-1)/(10^6+3)$.

Nézzük most a második játékos maximin stratégiáját, tegyük fel hogy q valószínűséggel választ fejet. Ha az első játékos fejet választ, a nyereség $-q + (1-q)$, ha írást, akkor $q - (1-q)$. A biztonsági szint így $\max_q \min\{-q+(1-q), q-(1-q)\}$, ami 0, és a második játékos maximin stratégiája a $q = 1/2$.

Ha mindkét játékos a maximin stratégiáját játssza, akkor az első játékos nyeresége $(10^6-1)/(10^6+ + 3)$, a másodiké pedig 0. Vegyük észre, hogy ez megegyezik a Nash-egyensúly korábban kiszámolt nyereségeivel. Viszont ez nem Nash-egyensúly, mert mindkét játékos tud egyoldalú módosítással javítani.

Tetszőleges véges játékra igaz, hogy a Nash-egyensúllyal ellentétben a maximin stratégiát ki lehet számolni lineáris programozással. Legyen M az a mátrix, aminek sorai S_i elemeinek felelnek meg, oszlopai S_{-i} elemeinek (azaz az i-n kívüli játékosok tiszta stratégia-vektorainak), és az (s_i, s_{-i}) helyen $u_i(s_i, s_{-i})$ szerepel. Ekkor az alábbi lineáris programozási feladat x^*, α^* optimális megoldásában x^*

egy maximin kevert stratégiája az i-edik játékosnak, α^* pedig a biztonsági szintje.

$$\begin{aligned} &\max\ \alpha \\ &M^T x \geq \alpha \cdot \mathbf{1} \\ &\sum_{j=1}^{|S_i|} x_j = 1 \\ &\qquad x \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

2.7. Kétszemélyes 0-összegű játékok

A 2.13. tétel garantálja a kevert Nash-egyensúly létezését, a bizonyítás azonban nem ad semmiféle algoritmust arra, hogyan lehet egy egyensúlyt megtalálni. A következő alfejezetekben az egyensúly megtalálásának algoritmikus kérdéseit vizsgáljuk. Az első fontos eredmény Neumann Jánostól származik 1928-ból, amelyben 0-összegű véges kétszemélyes játékok egyensúlyát írta le, sok évvel a Nash-egyensúly általános fogalmának megszületése valamint a lineáris programozás elméletének kidolgozása előtt. A tételt most a lineáris programozás dualitás tételének következményeként mutatjuk be.

Emlékezzünk, hogy a 0-összegű játék olyan játék, amiben a játékosok nyereségének az összege 0 minden kimenetelnél. Ekkor a táblázatban elég az első játékos nyereségét feltüntetni, például a kő-papír-ollónál:

	Kő	Papír	Olló
Kő	0	-1	1
Papír	1	0	-1
Olló	-1	1	0

Vegyük észre, hogy ha az első játékos a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kevert stratégiával játszik, akkor bárhogy is játszik a másik, az elsőnek a várható nyeresége 0 lesz.

Most nézzünk egy másik példát, a **3 érmés játékot**. Ebben mindkét játékosnál van 3 amerikai érme: egy *nickel*, ami 5 centet ér, egy *dime*, ami 10-et, és egy *quarter*, ami 25-öt. Mindketten választanak egyet a három fajta érméből. Ha ugyanazt választották, akkor az első játékos kapja meg mindkettőt, ha különbözőt, akkor a második. Tehát az első játékos nyereségmátrixa a következő.

1. \ 2.	N	D	Q
N	5	-5	-5
D	-10	10	-10
Q	-25	-25	25

Tudja-e a második játékos garantálni, hogy pozitív legyen a várható nyeresége, akárhogy is játszik a másik? Vagyis van-e olyan kevert stratégiája, aminél a várható nyereség pozitív az első játékos mindhárom tiszta stratégiájára (így minden kevertre is!)? Igen, például ha egyenletes eloszlás szerint választ (most a 2. játékos nyereségeit írjuk fel):

1. \ **2.**	N	D	Q	$\frac{1}{3}$N+$\frac{1}{3}$D+$\frac{1}{3}$Q
N	-5	5	5	5/3
D	10	-10	10	10/3
Q	25	25	-25	25/3

Ekkor tehát a második játékos várható nyeresége mindig legalább 5/3, az első játékos bármely kevert stratégiájánál. Azt mondjuk, hogy a második játékos garantálni tud 5/3 nyereséget ezzel a kevert stratégiával. Ebből következik, hogy az első játékosnak nincs olyan kevert stratégiája, amivel ő több, mint -5/3 nyereséget tud garantálni. Ha az első játékos egyenletes eloszlással játszik, akkor a várható nyereségek:

1. \ 2.	N	D	Q
N	5	-5	-5
D	-10	10	-10
Q	-25	-25	25
$\frac{1}{3}$N+$\frac{1}{3}$D+$\frac{1}{3}$Q	-10	-20/3	10/3

Tehát legrosszabb esetben -10 a nyeresége, tehát ezzel a kevert stratégiával garantálja, hogy vesztesége legfeljebb 10 legyen.

Az előző fejezetben láttuk, hogy tetszőleges (nem feltétlenül 0 összegű) játéknál a biztonsági szint, és a hozzá tartozó maximin stratégia, lineáris programozással kiszámolható. Neumann tétele azt mondja ki, hogy kétszemélyes 0 összegű játékban a két játékos biztonsági szintje egymás ellentettje, vagy másképp, ha α^* a maximális összeg, amennyi nyereséget az első játékos garantálni tud magának, akkor a második játékos el tudja érni, hogy legfeljebb α^*-ot veszítsen.

2.39. tétel (Neumann, 1928). *Egy véges kétszemélyes 0-összegű játékban az egyik játékos biztonsági szintje egyenlő a másik játékos biztonsági szintjének* -1*-szeresével.*

Bizonyítás. Legyen $S_1 = \{1, \ldots, m\}$, $S_2 = \{1, \ldots, n\}$; $u_1(i, j) = -u_2(i, j)$. Jelölje $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ az első játékos nyereségmátrixát.

Az előző fejezethez hasonlóan felírjuk az első játékos maximin stratégiáját és biztonsági szintjét meghatározó lineáris programot. Ha $x \in \mathbb{R}^m$ az első játékos egy kevert stratégiája, mint oszlopvektor, akkor az x által garantált várható nyeresége az első játékosnak az $x^\top A$ vektor legkisebb koordinátája. A legnagyobb ilyet fel tudjuk írni az alábbi lineáris programmal ($\mathbf{1}$ mindig egy megfelelő dimenziós csupa-1 vektort jelöl):

$$\begin{aligned} \max\ \alpha &: \\ x^\top A &\geq \alpha \cdot \mathbf{1}^\top \\ \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1 \\ x &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{Q}$$

Hasonlóan, ha $y \in \mathbb{R}^n$ a második játékos egy kevert stratégiája, akkor az y-nal garantált várható vesztesége az Ay vektor legnagyobb koordinátája. A legkisebb ilyet az alábbi LP feladat adja:

$$\begin{aligned} \min\ \beta &: \\ Ay &\leq \beta \cdot \mathbf{1} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i &= 1 \\ y &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{P}$$

Ez a két lineáris program éppen egymás duálisa (miért?). A dualitás tétel alapján következik, hogy a két optimum-érték megegyezik. □

2.40. következmény. *Kétszemélyes 0-összegű játékban a kevert Nash-egyensúlyok pontosan a két játékos maximin stratégiáiból álló vektorok.*

Bizonyítás. Legyen (x^*, α^*) az első játékos, (y^*, α^*) pedig a második játékos optimális megoldása a fenti lineáris program-párban. Az (x^*, y^*) stratégiavektor mellett az első játékos várható nyeresége α^*, a másodiké pedig $-\alpha^*$. Mivel x^* maximin stratégia, a második játékos stratégiáját megváltoztatva is legalább α^* az első játékos nyeresége, és így legfeljebb $-\alpha^*$ a második játékos nyeresége. A két játékos szerepét megcserélve is hasonló igaz, tehát (x^*, y^*) kevert Nash-egyensúly.

Be kell még látnunk, hogy ha x nem maximin stratégiája az első játékosnak, akkor (x, y) nem lehet kevert Nash-egyensúly semmilyen y-ra. Mivel x nem maximin, van y', hogy $u_1(x, y') < \alpha^*$, tehát $u_2(x, y') > -\alpha^*$. Ha $u_2(x, y) \leq -\alpha^*$, akkor ezek szerint (x, y) nem Nash-egyensúly, tehát tegyük fel, hogy $u_2(x, y) > -\alpha^*$, azaz $u_1(x, y) < \alpha^*$. Ekkor viszont $u_1(x^*, y) > u_1(x, y)$ ahol, tehát megint csak azt kaptuk, hogy (x, y) nem Nash-egyensúly. □

Mivel a lineáris programozási feladat megoldására ismertek hatékony (polinomiális) algoritmusok, ez a bizonyítás algoritmust is szolgáltat az optimum megtalálására. Megjegyezzük, hogy ezzel szemben az általános esetben nem várható polinomiális algoritmus Nash-egyensúly keresésére.

2.41. feladat. Mikor van egy kétszemélyes 0 összegű játéknak tiszta Nash-egyensúlya?

2.42. feladat. Egy kétszemélyes 0 összegű játékban az első játékos hasznossági mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

(az első játékos stratégiái felelnek meg a soroknak.) Számoljuk ki a Nash-egyensúly(oka)t. Lehet rajzolni.

2.43. feladat. Nézzük azokat a kétszemélyes 0 összegű játékokat, ahol az első játékos hasznossági mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

valamilyen valós t-re. Mi(k) a Nash-egyensúly(ok)?

2.44. feladat. Egy kétszemélyes 0 összegű játékban az első játékos hasznossági mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az összes kevert Nash-egyensúlyt.

2.45. feladat. Egy kétszemélyes 0 összegű játékban az első játékos hasznossági mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Számoljunk ki egy Nash-egyensúlyt. Tipp: bizonyos feltételek fennállása esetén egy sort vagy oszlopot elhagyhatunk a mátrixból úgy, hogy a kapott játék Nash-egyensúlya az eredetire is jó.

2.46. feladat. Egy kétszemélyes 0 összegű játékban az első játékos hasznossági mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \frac{5}{2} & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{5}{2} & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az összes kevert Nash-egyensúlyt.

2.47. feladat. Határozzuk meg a három érmés játék kevert Nash-egyensúlyait!

2.8. Kétszemélyes szimmetrikus játékok

Vegyünk most egy tetszőleges véges kétszemélyes játékot, amelyikben az első játékosnak n, a másodiknak m különböző stratégiája van. A nyereségeiket az A_1 illetve A_2 $n \times m$-es mátrixokkal írhatjuk le. (0-összegű játéknál $A_2 = -A_1$.) **Szimmetrikusnak** nevezzük a játékot, ha $n = m$ és $A_2 = A_1^\mathsf{T}$ (vagy lehet úgy permutálni a sorokat és oszlopokat, hogy ez teljesüljön). Ilyenek voltak például: kő-papír-olló, fogolydilemma, héja-galamb. Egy szimmetrikus játékban egy (σ_1, σ_2) kevert Nash-egyensúlyt **szimmetrikusnak** nevezünk, ha $\sigma_1 = \sigma_2$.

Vegyük észre, hogy ha ugyanazt az M számot hozzáadjuk A_1 és A_2 minden eleméhez, akkor a stratégiákat illetően semmi nem változik: pontosan ugyanazok lesznek a két játékban a Nash-egyensúlyok. Éppen ezért a továbbiakban azt is feltehetjük (egy kellően nagy szám hozzáadásával), hogy mind A_1, mind A_2 minden eleme szigorúan pozitív. A következő lemma azt mutatja, hogy ha egy szimmetrikus kétszemélyes játékban tudunk szimmetrikus Nash-egyensúlyt találni, akkor tetszőleges kétszemélyes játékban is tudunk.

2.48. lemma. *Tegyük fel, hogy egy kétszemélyes játék nyereségmátrixai, A_1 és A_2 csupa pozitívak. Vegyük azt a kétszemélyes szimmetrikus játékot, melyben a nyereségmátrixok $C \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ illetve $C^\top$, ahol*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Legyen ebben (τ, τ) egy szimmetrikus Nash-egyensúly, ahol $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ felbontásban τ_1 az első n, τ_2 pedig az utolsó m komponenst jelöli. Legyen a τ_1-beli komponensek összege c, a τ_2-belieké $1-c$. Ekkor az eredeti játékban $(\sigma_1, \sigma_2) = (\frac{\tau_1}{c}, \frac{\tau_2}{1-c})$ egy kevert Nash-egyensúly.

Bizonyítás. Először be kell látnunk, hogy $0 < c < 1$. Jelölje a stratégiákat $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Tegyük fel először, hogy $c = 0$, vagyis $\tau_1 \equiv 0$. Ekkor az első játékosnak tetszőleges a_i tiszta stratégiára a nyeresége pozitív (mivel A_1 minden eleme pozitív), egy tetszőleges b_j-re viszont 0. Vagyis τ tartójában nem a legjobb tiszta válaszok szerepelnek, ellentmondásban a 2.12. lemmával. A játékosok szerepének felcserélésével következik $c < 1$ is.

Ha $\tau_1(a_i) > 0$, akkor a_i-nek legjobb tiszta válasznak kell lennie τ-ra, tehát $A_1\tau_2$-t az i. sornak maximalizálnia kell. Ebből következik, hogy az eredeti játékban is a_i legjobb tiszta válasz σ_2-re. Ugyanígy látható, hogy ha $\tau_2(b_j) > 0$ akkor b_j is legjobb tiszta válasz σ_1-re, amiből ismét a 2.12. lemma alapján készen vagyunk. □

A következőkben bemutatott **Lemke-Howson algoritmus** tetszőleges szimmetrikus kétszemélyes játékban keres szimmetrikus Nash-egyensúlyt. Az algoritmus véges lesz ugyan, de sajnos nem polinomiális futásidejű. Ez nem meglepő: a kétszemélyes szimmetrikus Nash-egyensúly keresése az úgynevezett PPAD-teljes keresési problémák közé tartozik, amikre nem várunk polinomiális algoritmust.

Legyen A az első játékos kifizetési mátrixa ($n \times n$-es). A 13. ábra szemlélteti az algoritmus menetét az alábbi mátrixszal:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ismét feltehetjük, hogy A minden eleme szigorúan pozitív. Vegyünk egy x kevert stratégiát (azaz $\sum x_i = 1$, $x \geq 0$.) Legyen α az Ax vektor maximális értéke. Ha a második játékos x stratégiát választja, akkor az első játékos legjobb tiszta válaszai azon i indexekhez tartoznak, melyekre $(Ax)_i = \alpha$. Ennek megfelelően x pontosan akkor szimmetrikus Nash-egyensúly, ha az alábbi feltétel teljesül:

$$x_i = 0 \text{ vagy } (Ax)_i = \alpha \text{ teljesül minden } i = 1, \ldots n\text{-re.} \tag{4}$$

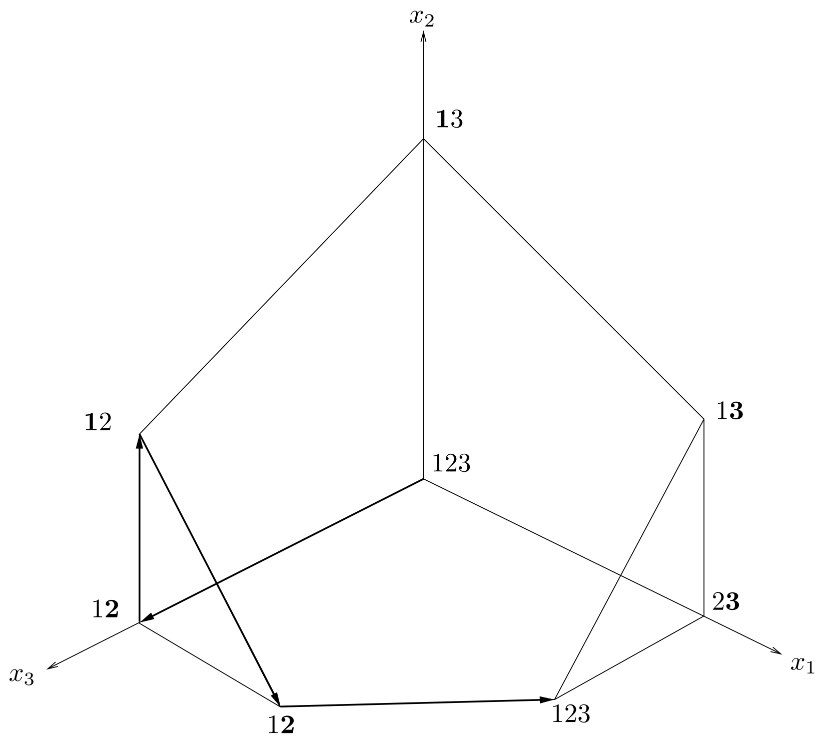
Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 1, x \geq 0\}$. Ez egy korlátos poliéder (politóp) lesz, melynek $\mathbf{0}$ egy csúcsa. Minden csúcsában legalább n egyenlőség kell teljesüljön; egy z csúcshoz mondjuk azt, hogy az i index **reprezentálva van**, ha $z_i = 0$ és $(Az)_i = 1$ közül legalább az egyik fennáll. Ha mindkettő teljesül, akkor i **duplán van reprezentálva**.

2.49. állítás. *Ha z olyan csúcs, amelynél minden $1 \leq i \leq n$ reprezentálva van, és $z \neq \mathbf{0}$, akkor $x = \frac{z}{\sum_i z_i}$ szimmetrikus Nash-egyensúly.*

Az állítás rögtön következik abból, hogy (4) teljesül x-re. Célunk tehát egyetlen, a $\mathbf{0}$-tól különböző olyan csúcsot találni, amelynél minden stratégia reprezentálva van. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy P **nem degenerált**. Ez azt jelenti, hogy minden csúcs pontosan n feltételt teljesít egyenlőséggel. (Pl. az oktéder degenerált, a dodekaéder nem az.) A feltételeket egy nagyon kicsit módosítva, pl. a mátrix minden eleméhez egy kicsi véletlen számot adva tetszőleges poliédert ilyenné tehetünk úgy, hogy a módosított probléma egy Nash-egyensúlya az eredetiben is Nash-egyensúly legyen.

P élei ekkor azok a halmazok, melyek $n-1$ feltételt teljesítenek egyenlőséggel. Minden élre két csúcs illeszkedik, ezeket szomszédosaknak nevezzük. Legyen F_z a z csúcsnál egyenlőséggel teljesülő feltételek halmaza. A z csúcsnak az $f \in F_z$ feltétel szerinti szomszédja a z' csúcs, ha $F_z \cap F_{z'} = F_z - f$.

Legyen most Z_0 azon csúcsok halmaza, melyeknél minden index reprezentálva van, Z pedig azoké, melyekre az első $n-1$ index reprezentálva van. Világos, hogy $\mathbf{0} \in Z_0 \subseteq Z$. Mivel a poliéder nem degenerált, a $Z - Z_0$-beli csúcsoknál pontosan egy index van duplán reprezentálva.



13. ábra

Legyen $z_0 = 0$, és vegyük z_0-nak az $x_n \geq 0$ feltétel szerinti z_1 szomszédját. Ha $z_1 \in Z_0$, akkor készen vagyunk; egyébként van egy egyértelmű duplán reprezentált i index. Az $(Ax)_i \leq 1$ feltétel szerinti szomszédja z_0; az $x_i \geq 0$ feltétel szerinti szomszédja viszont egy ettől különböző z_2.

Így tovább, ha az általános lépésben $z_t \in Z_0$, akkor befejezzük az eljárást. Ha $z_t \in Z - Z_0$, akkor van egy egyértelmű duplán reprezentált i index. Ekkor az $x_i \geq 0$ és $(Ax)_i \leq 1$ feltételek szerinti egyik szomszédja z_{t-1}, a másik pedig egy ettől különböző z_{t+1}. Azt állítjuk, hogy z_{t+1} különbözik az eddigi $z_0, \ldots, z_t$ csúcsoktól. Ebből következik, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget kell érjen, ami azt jelenti, hogy találunk egy $\mathbf{0}$-tól különböző Z_0-beli csúcsot.

Tegyük fel indirekten, hogy $z_{t+1} = z_j$, $h < t$ az első ismétlődés. Ekkor z_{t+1} a z_h-ban duplán reprezentált indexhez tartozó egyik feltétel szerinti szomszédja volna. Azonban z_{h-1} és z_{h+1} már két ilyen szomszéd volt (illetve ha $h = 0$, akkor z_1 volt az egyetlen ilyen szomszéd).

2.50. megjegyzés. Az eredményt megfogalmazhatjuk a Sperner Lemma egy poliéderes változatának következményeként is:

2.51. tétel (Poliéderes Sperner Lemma)**.** *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ egy n-dimenziós korlátos poliéder, aminek a lapjai ki vannak színezve n színnel. Tegyük fel, hogy van egy olyan v csúcs, amire minden színből pontosan 1 lap illeszkedik. Ekkor van egy v-től különböző csúcs, amire minden színből legaláb 1 lap illeszkedik.*

Bizonyítás. Vehetjük a polárist, hogy a csúcsok és lapok szerepe felcserélődjön; innen hasonlóan bizonyítható, mint a 2.34. Lemma. □

2.52. következmény. *Racionális mátrix-szal adott kétszemélyes szimmetrikus játékban mindig van racionális szimmetrikus Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Tekintsük a $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 1, x \geq 0\}$ korlátos poliédert; az $x_j \geq 0$ lapot színezzük j színűre, az $(Ax)_i \leq 1$ lapot pedig i színűre. A poliédernek $\mathbf{0}$ egy olyan csúcsa, amire minden színből pontosan 1 lap illeszkedik. A poliéderes Sperner lemma szerint van egy nemnulla z csúcs, amire minden színből legalább 1 lap illeszkedik, ami pont azt jelenti, hogy minden i-re $z_i = 0$ és $(Az)_i = 1$ közül legalább az egyik fennáll, így $z/(\sum_i z_i)$ Nash-egyensúly.. □

2.53. megjegyzés. Háromszemélyes játékban már előfordulhat, hogy bár a nyereség-függvények egészértékűek, nincs racionális Nash-egyensúly.

2.54. megjegyzés. Mint már említettük, a a kétszemélyes szimmetrikus Nash-egyensúly keresése az úgynevezett PPAD-teljes keresési problémák közé tartozik (ez Chen és Deng mély és nehéz 2006-os eredménye). A PPAD bonyolultsági osztály definíciója meglehetősen techinkai jellegű, de a teljesség kedvéért leírjuk. Definiáljuk az *Útvonal-végződés (End of a Line)* problémát. A probléma inputja két Boole-hálózat, P (predecessor) és S (successor); mindkettő n-bites inputból n-bites outputot csinál, és még azt is tudjuk, hogy $P(0) = 0$, $S(0) \neq 0$, és $P(S(0)) = 0$. Tekintsük azt a D irányított gráfot, aminek a csúcsai az n-bites bináris számok, az élei pedig az olyan (u, v) rendezett párok, amikre $S(u) = v$ és $P(v) = u$. A cél egy olyan, 0-tól különböző v csúcsot találni, ami első fokú D-ben. Ilyen biztos létezik, hiszen a 0 csúcs elsőfokú, és D maximális fokszáma 2, tehát páros sok elsőfokú csúcs van.

Teljes keresési problémának nevezünk egy olyan keresési problémát, aminek garantáltan van legalább egy megoldása, és a feladat egy megoldás megtalálása. Az Útvonal-végződés probléma például ilyen. A PPAD osztály azokat a keresési problémákat tartalmazza, amik polinom időben visszavezethetők az Útvonal-végződés problémára. Ilyan például a fenti Poliéderes Sperner Lemma. Chen és Deng eredményéből következik, hogy a Poliéderes Sperner Lemma egyben PPAD-teljes is.

2.55. feladat. Egy kétszemélyes szimmetrikus játékban az első játékos hasznossági mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Számoljuk ki a Nash-egyensúly(oka)t. Mit nevezhetünk ennél a játéknál "legjobb nyilvános stratégiának"?

2.56. feladat. Mik a szimmetrikus Nash-egyensúlyok abban a szimmetrikus játékban, ahol az első játékos hasznossági mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}?$$

Melyik csúcsok vannak V_{n-1}-ben? Hogy néz ki a gráf a $V_{n-1} \cup V_n$ csúcshalmazon, amit előadáson néztünk?

2.57. feladat. Legyen $\pi \in S_n$ egy permutáció, és legyen A az a mátrix, amiben $a_{i,\pi(i)} = 1$ ($i = 1, \ldots, n$), a többi elem pedig 0. Tekintsük azt a kétszemélyes szimmetrikus játékot, ahol A az első játékos hasznossági mátrixa. Mik a szimmetrikus Nash-egyensúlyok?

2.9. Korrelált egyensúly

A héja-galamb játékban három kevert Nash-egyensúly létezik: a két tiszta egyensúlyban ellentétes stratégiát választanak, a harmadik kevert Nash-egyensúlyban pedig mindketten $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választanak a két stratégia közt. A két tiszta egyensúlyban a galamb egyértelműen rosszabbul jár, ez tehát az egyik játékossal szemben igazságtalannak tekinthető. Nézzük a kevert egyensúlyt; ebben az egyes kimenetelek valószínűsége:

	Héja	Galamb
Héja	1/4	1/4
Galamb	1/4	1/4

Ekkor mindkettejük várható nyeresége $\frac{1}{4}(1 + 4 + 3) = 2$ lesz – az egyensúly igazságos ugyan, de mindketten lényegesen rosszabbul járnak, mintha ők lennének a tiszta stratégiaválasztásban a héják. Vegyük ezzel szemben a kimenetelek következő eloszlását:

	Héja	Galamb
Héja	0	1/2
Galamb	1/2	0

Ez nemcsak hogy nem felel meg Nash-egyensúlynak, de nincsenek is olyan kevert stratégiák, amelyek ezt az eloszlást indukálnák (egy σ kevert stratégiaválasztás által indukált q eloszlás az, amire $q(s) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(s_i)$). Mégis, bizonyos értelemben racionális kimenetelnek tekinthető: tegyük fel, hogy egy független harmadik szereplő – nevezzük játékvezetőnek – e szerint az eloszlás szerint választja a két kimenetel egyikét, és azt javasolja a játékosoknak. A gyáva nyúl narratívában gondolkodva, ez egy közlekedési lámpának felel meg, amelyik az egyik irányban pirosat, a másikban zöldet mutat. A játékosokat nem kényszerítjük arra, hogy elfogadják a javaslatot. Ez számukra mégis racionálisnak tűnik: ha ugyanis tudjuk, hogy a másiknak épp az ellentétes viselkedés lett javasolva, és feltesszük, hogy ő elfogadja, akkor rosszabbul járunk, ha mi eltérünk a javaslattól. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 2.5, magasabb, mint a kevert Nash-egyensúly esetén volt.

A korrelált egyensúly fogalmát Aumann vezette be ehhez hasonló szituációk általános leírására. Tegyük fel, hogy adott a kimenetelek S halmazán egy $q(\mathbf{s})$ valószínűségi eloszlás: $\sum_{\mathbf{s}\in S} q(\mathbf{s}) = 1$. A játékvezető ezen eloszlás szerint választ egy $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ kimenetelt. Az i. játékosnak javaslatot tesz az s_i stratégia használatára (de nem árulja el neki a teljes $\mathbf{s}$-t, vagyis a többi játékosnak javasolt stratégiákat). Az összes játékos számára ismert azonban a q eloszlás.

q akkor van **korrelált egyensúlyban**, ha ezen információk alapján mindegyik i. játékosnak érdemes elfogadni a javaslatot. Annak ismeretében, hogy a számára javasolt stratégia s_i volt,

$$q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}) := \frac{q(s_i, \mathbf{t}_{-i})}{\sum_{\mathbf{w}_{-i}\in S_{-i}} q(s_i, \mathbf{w}_{-i})}$$

a feltételes valószínűsége annak, hogy a többiek számára a $\mathbf{t}_{-i} \in S_{-i}$ javaslat lett téve. Vagyis s_i-t választva a várható haszna

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, \mathbf{t}_{-i}) \cdot q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}).$$

Ez legalább olyan jó kell legyen, mint tetszőleges másik $z \in S_i$, azaz

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}) \cdot u_i(s_i, \mathbf{t}_{-i}) \geq \sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}) \cdot u_i(z, \mathbf{t}_{-i}).$$

Átrendezve és $\sum_{\mathbf{w}_{-i}\in S_{-i}} q(s_i, \mathbf{w}_{-i})$-vel beszorozva azt kapjuk, hogy q pontosan akkor korrelált egyensúly, ha minden i játékosra, minden $s_i, z \in S_i$ stratégiáira

$$\sum_{\mathbf{t}_{-i}\in S_{-i}} (u_i(s_i, \mathbf{t}_{-i}) - u_i(z, \mathbf{t}_{-i})) \cdot q(s_i, \mathbf{t}_{-i}) \geq 0. \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy ezek a feltételek, azzal együtt, hogy q valószínűségi eloszlás kell legyen, mind lineáris egyenlőtlenségek, tehát a korrelált egyensúlyok lineáris egyenlőtlenségekkel leírt poliédert alkotnak. Ezért hatékonyan tudunk korrelált egyensúlyt találni, sőt, különböző lineáris célfüggvényekre nézve legjobbat is, például olyat, aminél a játékosok várható nyereségének összege maximális. Ezt a módszert alkalmazva látható az alábbi tétel:

2.58. tétel. *Tetszőleges véges játékban a (bármilyen lineáris célfüggvény szerinti) legjobb korrelált egyensúly meghatározása lineáris programozás segítségével megtalálható.*

Példaként határozzuk meg a héja-galamb játékra a legjobb korrelált egyensúlyt abban az értelemben, hogy a játékosok várható nyereségének összege maximális legyen! A (5) egyenlőtlenségek a következők:

$$(0-1)q(11) + (4-3)q(12) \geq 0$$
$$(1-0)q(21) + (3-4)q(22) \geq 0$$
$$(0-1)q(11) + (4-3)q(21) \geq 0$$
$$(1-0)q(12) + (3-4)q(22) \geq 0$$

Tudjuk továbbá, hogy a négy érték nemnegatív és összegük 1:

$$q(11) + q(12) + q(21) + q(22) = 1.$$

A várható nyereségek összege a

$$(0 + 0)q(11) + (4 + 1)q(12) + (1 + 4)q(21) + (3 + 3)q(22),$$

lineáris célfüggvény. Az optimális megoldás $q(12) = q(21) = q(22) = \frac{1}{3}$ lesz, vagyis:

	Héja	Galamb
Héja	0	1/3
Galamb	1/3	1/3

Ez annak felel meg, hogy a közlekedési lámpa az esetek harmadában pirosat mutat; mindkét játékos várható nyeresége $\frac{8}{3}$.

Legyen most $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Delta$ egy kevert stratégiaválasztás! Tekintsük a $q(s) = \Pi\sigma_i(s_i)$ eloszlást! Ekkor $q_{s_i}(\mathbf{t}_{-i}) = \Pi_{j \neq i}\sigma_j(t_j)$, vagyis a feltételes valószínűség független s_i választásától. Ezt használva, a (5) egyenlőtlenség épp azzal ekvivalens, hogy s_i legjobb tiszta válasz σ_{-i}-re. Mivel ennek minden i-re és minden olyan s_i-re teljesülnie kell, amelyre $\sigma_i(s_i) > 0$, ezért a 2.12. lemma alapján σ kevert Nash-egyensúly. Vagyis a korrelált egyensúly általánosítja a kevert Nash-egyensúly fogalmát, de mint a fenti példán láttuk, bővebb is lehet nála.

2.10. Evolúciósan stabil kevert stratégiák

Ebben a fejezetben kétszereplős szimmetrikus játékokkal foglalkozunk. Egy ilyen játékhoz elképzelhetünk egy populációt, amiben valamilyen eloszlásban szerepelnek a különböző tiszta stratégiák (viselkedésformák). Arra vagyunk kíváncsiak, hogy ha egy mutáció folytán a populációban megjelenik egy új viselkedés, akkor az idővel eltűnik (mert a mutáns egyedek tipikusan rosszul jönnek ki egy véletlenszerűen választott másik egyeddel játszott játékból), vagy megmarad (mert várhatóan legalább olyan jól kijönnek, mint az átlagos egyedek). Ha nincs perzisztens mutáció, akkor az eloszlást evolúciósan stabilnak nevezzük.

A fogalmat John Maynard Smith és George R. Price vezette be. Fontos (bár matematikai szempontból irreleváns), hogy itt „stratégia” alatt egy viselkedésformát értünk, illetve viselkedésformák eloszlását egy populáción belül, nem pedig egy tudatos döntést. Így evolúciósan stabil stratégiáról akármilyen populáció esetén beszélhetünk, nem csak intelligens fajoknál. A precíz definíció a következő.

2.59. definíció. Az x kevert stratégia **evolúciósan stabil**, ha tetszőleges $e \neq x$ tiszta stratégiára

i) $u_1(e, x) \leq u_1(x, x)$,

ii) ha $u_1(e, x) = u_1(x, x)$, akkor $u_1(x, e) > u_1(e, e)$.

A definíció megértéséhez tegyük fel, hogy a populáció új összetétele $\epsilon e + (1 - \epsilon)x$, ahol ϵ kicsi. Ha egy x típusú egyed játszik egy véletlenül választott másikkal, akkor nyeresége $\epsilon u_1(x, e) + (1 - \epsilon)u_1(x, x)$. Ha azonban egy e típusú egyed játszik, akkor az ő nyeresége $\epsilon u_1(e, e) + (1 - \epsilon)u_1(e, x)$. A definícióban szereplő feltételek azzal ekvivalensek, hogy elég kis ϵ esetén az e típusú egyed várható nyeresége szigorúan kisebb, mint az x típusú egyedé. Vegyük észre, hogy az i) feltétel miatt egy evolúciósan stabil kevert stratégia egyben szimmetrikus Nash-egyensúly is; fordítva azonban ez nem feltétlenül igaz. A kő-papír-olló játékban például egyáltalán nincs evolúciósan stabil stratégia, mert az egyetlen Nash-egyensúly az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kevert stratégia, ez pedig nem teljesíti a ii) feltételt.

Ha a héja-galamb játékot nézzük, az $x = (1/2,1/2)$ stratégia evolúciósan stabil, hiszen $u_1(x, x) = 2 = u_1(H, x) = u_1(G, x)$, $u_1(x, H) = 1/2 > 0 = u_1(H, H)$, és $u_1(x, G) = 7/2 > 3 = u_1(G, G)$. A tiszta Nash-egyensúlyok nem szimmetrikusak, így azok nem jöhetnek szóba.

Végül nézzük a következő egyszerű koordinációs játékot. Mindkét játékos A és B stratégia közül választhat; ha mindketten A-t választják, nyereményük $\alpha > 0$, ha mindketten B-t, akkor pedig $\beta > 0$. Egyébként a nyeremény 0. Feltehetjük, hogy $\alpha \geq \beta$. Világos, hogy a két tiszta stratégia szimmetrikus Nash-egyensúly, és könnyű ellenőrizni hogy evolóciósan stabilak. Van azonban egy kevert szimmetrikus Nash-egyensúly is: $x = (\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta})$. Utóbbi nem evolúciósan stabil, hiszen $u_1(x, A) \leq u_1(A, A)$.

Evolúciósan erősen stabil kevert stratégiák

A fenti definíciót módosíthatjuk úgy, hogy a mutációnál is megengedünk kevert stratégiát.

2.60. definíció. Az x kevert stratégia **evolúciósan erősen stabil**, ha tetszőleges $z \neq x$ kevert stratégiára

i) $u_1(z,x) \leq u_1(x,x)$,

ii) ha $u_1(z,x) = u_1(x,x)$, akkor $u_1(x,z) > u_1(z,z)$.

Megjegyezzük, hogy az i) feltétel ekvivalens a tiszta stratégiás változattal, hiszen ha x nem legjobb válasz önmagára, akkor van tiszta stratégia, ami jobb válasz. Látni fogjuk, hogy a ii) feltétel erősebb, mint a tiszta változat, bár két stratégia esetén ekvivalensek.

2.61. tétel. *Ha két stratégia van, akkor minden evolúciósan stabil kevert stratégia erősen stabil.*

Bizonyítás. Legyen A és B a két tiszta stratégia. Az x kevert stratégia válassza p valószínűséggel A-t, és $1-p$ valószínűséggel B-t. Legyen z egy kevert stratégia, ami q valószínűséggel választja A-t, ahol $0 < q < 1$. Ha z sérti a ii) feltételt, akkor nyilván $u_1(z,x) = u_1(x,x)$, tehát $u_1(A,x) = u_1(B,x) = u_1(x,x)$.

Nézzük először a $p = 1$ esetet (a $p = 0$ eset hasonló, úgyhogy azt nem írjuk le külön). Ekkor $u_1(A,A) = u_1(B,A)$, és $u_1(A,B) > u_1(B,B)$ hiszen tiszta stratégiákra teljesül a ii) feltétel. Mivel $q < 1$, $u_1(A,z) > u_1(z,z)$, tehát z mégsem sérti a ii) feltételt.

Tegyük fel most, hogy $0 < p < 1$. Mivel tiszta stratégiákra teljesül a ii) feltétel, $u_1(B,A) > u_1(A,A)$ és $u_1(A,B) > u_1(B,B)$. Bontsuk a bizonyítást két esetre p és q viszonya szerint.

1. eset: $p < q$. Ekkor az $u_1(A,x) = u_1(B,x)$, $u_1(B,A) > u_1(A,A)$ és $u_1(A,B) > u_1(B,B)$ feltételekből következik, hogy $u_1(A,z) < u_1(B,z)$, tehát $u_1(x,z) > u_1(z,z)$.

2. eset: $p > q$. Ekkor az $u_1(A,x) = u_1(B,x)$, $u_1(B,A) > u_1(A,A)$ és $u_1(A,B) > u_1(B,B)$ feltételekből következik, hogy $u_1(A,z) > u_1(B,z)$, tehát $u_1(x,z) > u_1(z,z)$. □

Három stratégia esetén viszont már nem ekvivalens a két fogalom, amint az alábbi példa mutatja.

	A	B	C
A	(1,1)	(1,1)	(1,1)
B	(1,1)	(0,0)	(3,3)
C	(1,1)	(3,3)	(0,0)

Az A tiszta stratégia könnyen ellenőrizhetően evolúciósan stabil. Viszont nem erősen stabil: legyen $z = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$. Ekkor $u_1(z,A) = u_1(A,A)$, és $u_1(A,z) = 1 < 3/2 = u_1(z,z)$.

2.62. tétel. *Ha x evolúciósan erősen stabil, z szimmetrikus Nash-egyensúly, és $x \neq z$, akkor van olyan tiszta stratégia, ami z-ben pozitív valószínűséggel szerepel, de x-ben nem.*

Bizonyítás. Mivel z Nash-egyensúly, $u_1(z,z) \geq u_1(x,z)$. Az evolúciósan erősen stabil stratégiákra vonatkozó két feltétel miatt ebből következik, hogy $u_1(x,x) > u_1(z,x)$, tehát z nem legjobb válasz x-re. Mivel x legjobb válasz x-re, kell lenni olyan stratégiának, ami z-ben pozitív valószínűséggel szerepel, de x-ben nem. □

2.63. következmény. *Véges játékokban csak véges sok evolúciósan erősen stabil kevert stratégia lehet.*

Replikátor dinamika

Az eddigiekben a populációk viselkedését statikusan elemeztük: azt vizsgáltuk, hogy egy adott populáció-szerkezet mikor stabil. A kérdést meg lehet közelíteni dinamikusan is, azaz a populáció időbeni változását modellezve. Legyenek a tiszta stratégiák (viselkedésformák) $e^1, \ldots, e^k$. A t időpontban a populáció egy $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$ vektorral jellemezhető, ahol $x_j(t) \geq 0$ ($j \in [k]$) és $\sum_{j=1}^k x_j(t) = 1$; $x_j(t)$ az e^j viselkedésforma aránya a populációban. Szeretnénk azt modellezni, hogy egy viselkedésforma átörökítési aránya azzal arányos, hogy az adott viselkedésű egyed mennyivel több hasznot ér el a populáció egy véletlen egyedével szemben, mint a populáció egy másik véletlen egyede. Ez a dinamika a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$\dot{x}_j(t) = (u_1(e^j, x(t)) - u_1(x(t), x(t)))x_j(t) \quad (j = 1, \dots, k).$$

A kapott rendszer a játékhoz tartozó **replikátor dinamika**. Olyan megoldást keresünk, amire $x_j(t) \geq$ ≥ 0 ($j \in [k]$) és $\sum_{j=1}^{k} x_j(t) = 1$. Be lehet látni, hogy mindig létezik ilyen megoldás, sőt, az is igaz lesz, hogy $x_j(0) = 0$ esetén $x_j(t) = 0$ minden t-re, $x_j(0) > 0$ esetén pedig $x_j(t) > 0$ minden t-re. A létezés azon múlik, hogy egyrészt létezik olyan c konstans, hogy $|\dot{x}_j(t)| \leq c|x_j(t)|$ minden t-re és j-re, másrészt

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{k} (u_1(e^j, x(t)) - u_1(x(t), x(t)))x_j(t) = u_1(x(t), x(t)) - u_1(x(t), x(t)) = 0.$$

A replikátor dinamika az egyes viselkedésformák arányát írja le a populációban, és nem mond semmit a teljes populáció méretének változásáról.

2.64. állítás. *Ha x szimmetrikus Nash-egyensúly, akkor a konstans x függvény megoldása a rendszernek.*

Bizonyítás. A konstans x függvény pontosan akkor megoldása a rendszernek, ha minden j-re $x_j = 0$ és $u_1(e^j, x) - u_1(x, x) = 0$ közül legalább az egyik teljesül, ez pedig Nash-egyensúlyokban igaz. □

A szimmetrikus Nash-egyensúlyok ezek szerint stacionárius megoldást adnak, de nem feltétlenül stabilak. Nézzük például azt a koordinációs játékot, ahol két stratégia van, és mindkét játékos nyeresége 1, ha ugyanazt választják és 0 ha nem. Az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Nash-egyensúly, de ha akármilyen kicsi $\epsilon > 0$-ra $x(0) = (\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon)$-ból indulunk, akkor $x(t)$ tart az $(1,0)$ vektorhoz.

Érdekes eset a kő-papír-olló játék is, ahol a következő rendszert kapjuk (felhasználva, hogy $u_1(y, y) =$ $= 0$ tetszőleges y-ra):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= (x_2(t) - x_3(t)))x_1(t), \\
\dot{x}_2(t) &= (x_3(t) - x_1(t))x_2(t), \\
\dot{x}_3(t) &= (x_1(t) - x_2(t)))x_3(t).
\end{aligned}$$

Legyen $h(t) = \log(x_1(t)x_2(t)x_3(t))$. A fentiből azt kapjuk, hogy

$$\dot{h}(t) = \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)} + \frac{\dot{x}_2(t)}{x_2(t)} + \frac{\dot{x}_3(t)}{x_3(t)} = 0,$$

azaz $h(t)$ konstans, így az $x_1(t)x_2(t)x_3(t)$ szorzat állandó tetszőleges $x(0)$ kiindulás esetén.

2.65. definíció. Egy x^* kevert stratégia Lyapunov-stabil, ha x^* tetszőleges B környezetéhez van $B' \subseteq B$ környezete, hogy $x(0) \in B'$ esetén $x(t) \in B$ minden t-re.

A kő-papír-olló játék Nash-egyensúlya Lyapunov-stabil, hiszen egy (x_1, x_2, x_3) kevert stratégia pontosan akkor van közel az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ stratégiához, ha $x_1x_2x_3$ közel van $1/27$-hez. A koordinációs játék kevert egyensúlya azonban nem Lyapunov-stabil, hiszen az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ stratégiának bármilyen kis környezetéből is indulunk, előbb-utóbb a $(0,1)$ vagy az $(1,0)$ közelébe jutunk.

Érdemes egy erősebb stabilitási fogalmat is bevezetni.

2.66. definíció. Egy x^* kevert stratégia aszimptotikusan stabil, ha Lyapunov-stabil, és van x^*-nak olyan B^* környezete, hogy tetszőleges $x(0) \in B^*$ esetén $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$.

A kő-papír-olló játékban az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ stratégia nem aszimptotikusan stabil, hiszen $x_1(t)x_2(t)x_3(t)$ konstans, tehát $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ nem tart $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$-hoz. Bizonyítás nélkül említjük a következő tételt, ami szerint az evolúciósan erősen stabil stratégiák ezzel a konvergencia-tulajdonsággal is rendelkeznek.

2.67. tétel. *Ha x^* evolúciósan erősen stabil, akkor aszimptotikusan stabil. Ha x^* még teljesen kevert is (azaz minden tiszta stratégia pozitív valószínűségű), akkor tetszőleges $x(0)$ teljesen kevert stratégia esetén* $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$. □

A héja-galamb játékra nézve ez azt jelenti, hogy bármilyen kezdeti héja-galamb arányból induljunk is ki, a fele-fele arányhoz fogunk konvergálni.

2.11. Közlekedési játékok és az anarchia ára

2.11.1. Nem-atomos közlekedési játékok

Az s városból a t városba minden nap sok autós utazik. Olyan sok, hogy egyetlen autósnak a forgalomhoz való hozzájárulását elhanyagolhatónak tekintjük, és a problémát úgy modellezzük, mintha kontinuum sok autós utazna (ezt nevezzük nem-atomos modellnek). A két várost folyó köti össze, amin a városokon kívül nincs híd, így mindenkinek dönteni kell, hogy a folyó bal vagy jobb partján utazik. A bal parton félútig egy egyenes de szűk útszakaszon, félúttól pedig egy nagyot kerülő autópályán lehet utazni. A jobboldalon fordítva: Félútig hosszan kerülő autópályán, félúttól pedig rövid de szűk szakaszon lehet haladni. Az autópálya-szakaszokon 1 óra a menetidő; a rövid de szűk szakaszokon x óra, ahol x az útvonalat használó autósok hányada.

Mikor a legkisebb az átlagos menetidő? Könnyen látható, hogy akkor, ha a forgalom fele megy mindkét oldalon, hiszen ekkor mindenki másfél óra alatt eljut s-ből t-be. Ha viszont az egyik oldalon $1/2+z$ hányad megy valamilyen $z>0$-ra, akkor az arra menők menetideje $3/2+z$ lesz, és csak $1/2-z$ hányadnak lesz $3/2-z$ a menetideje, tehát az áltag nagyobb mint $3/2$.

Azt is láthatjuk, hogy az $1/2$ arány az egyetlen megoldás, ahol senki sem érzi úgy, hogy más útvonalon haladva gyorsabban célba érne. Az egyensúly tehát itt egyben minimalizálja az átlagos menetidőt.

Mi történik, ha építünk egy hidat a folyóra a két város közt félúton? Vegyük úgy, hogy a hídon 0 az átjutási idő. Sajnos az átlagos menetidőt így sem lehet csökkenteni: mivel s-ből mindenkinek ki kell lépnie és t-be mindenkinek be kell lépnie, az átlagos menetidő legalább

$$2 \min_{0\le x\le 1} x^2+(1-x),$$

ami $3/2$, $x=1/2$-nél.

A híd tehát nem javított az elérhető legjobb átlagos menetidőn. Azonban a helyzet ennél is rosszabb: az optimális megoldás annak az esetnek felel meg, amikor senki se használja a hidat, és továbbra is az utazók fele megy a bal és fele a jobb parton. Viszont ez immár nem egyensúly: minden egyes autós azt látja, hogy ha félútig a bal parton menne és onnan a jobb parton, akkor 1 óra alatt célba érne. Sőt: bármilyen megoldásnál, ahol ez az útvonal nem telített, érdemes erre az útvonalra váltani. Az egyetlen egyensúly tehát az, hogy mindenki a bal parton indul és a jobb parton ér t-be; ekkor viszont mindenkinek 2 óra a menetideje.

Mivel a közlekedőknek nem írhatjuk elő, hogy melyik útvonalat válasszák, az egyensúlyok sokszor jobban jellemzik a tényleges közlekedési viszonyokat, mint a legjobb átlagos menetidőt adó megoldások. A fenti példa az úgynevezett **Braess paradoxon**: azt mutatja, hogy egy meggondolatlan fejlesztéssel (jelen esetben a hídépítés) akár ronthatunk is a közlekedés minőségén.

Ideje precízen definiálni a nem-atomos közlekedési játék fogalmát. Adott egy $D=(V,E)$ irányított gráf s_i,t_i $(i=1,\dots,k)$ kijelölt csúcspárokkal, $d_1,\dots,d_k$ nemnegatív igényekkel, valamint minden $e\in$ $\in E$ élre egy $c_e:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ folytonos és monoton növő függvény. Jelölje $\mathcal{P}_i$ az összes s_i-t_i út halmazát, és legyen $\mathcal{P}=\cup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$. **Folyam** alatt most egy olyan $f\in\mathbb{R}_+^{\mathcal{P}}$ vektort értünk, amire $\sum_{P\in\mathcal{P}_i} f_P=d_i$. Egy f folyam értéke az $e\in E$ élen $f_e:=\sum\{f_P: e\in P\}$. Az f folyam **költsége** $c(f)=\sum_{e\in E} c_e(f_e)f_e$. Ha $\sum_{i=1}^k d_i=1$, akkor f_P értelmezhető úgy, mint a P utat használók aránya, c_e mint az átjutási idő a forgalom függvényében, és a folyam költsége mint az átlagos menetidő. A későbbi jelölések egyszerűsége érdekében nem tesszük fel, hogy $\sum_{i=1}^k d_i=1$.

Kétféle speciális tulajdonságú folyamot vizsgálunk:

– Egy folyam **optimális**, ha minimális költségű a folyamok között.

– Egy f folyam **egyensúlyi**, ha minden i-re és $P\in\mathcal{P}_i$-re teljesül, hogy ha $f_P>0$, akkor $\sum_{e\in P} c_e(f_e)\le\sum_{e\in P'} c_e(f_e)$ minden $P'\in\mathcal{P}_i$-re, azaz P legolcsóbb út s_i-ből t_i-be a $c_e(f_e)$ élköltségekre nézve.

Optimális folyam mindig létezik, hiszen a folyamok halmaza kompakt (és konvex), és ezen minimalizálunk egy folytonos függvényt. Be fogjuk látni, hogy mindig létezik egyensúlyi folyam is. Egy adott J játékban az **anarchia ára** (price of anarchy, POA) a következő:

$$POA(J) = \frac{\max\{c(f): \; f \text{ egyensúlyi folyam}\}}{\min\{c(f): \; f \text{ folyam}\}}.$$

A Braess paradoxonnál a hídépítés előtt az anarchia ára 1, míg utána 4/3.

Teljes átlalánosságban nem tudunk felső korlátot mondani az anarchia árára, ezért megszorítást teszünk arra, hogy a c_e függvények milyenek lehetnek. Legyen $\mathcal{C}$ a folytonos és monoton növő $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvények egy tetszőleges részhalmaza. Megmutatjuk, hogy ha az összes olyan közlekedési játékot nézzük, ahol a c_e függvényeket $\mathcal{C}$-ből választjuk, akkor ezek közül az anarchia ára egy olyanban lesz a legnagyobb, ahol csak 2 csúcs van (s és t) és csak két él. Kicsit pontosabban, adott $c \in \mathcal{C}$-re és $d \in \mathbb{R}_+$-re a $J(c,d)$ **Pigou-hálózat** a következő:

- s-ből t-be két párhuzamos él megy, e és e';
- $c_e = c$;
- $c_{e'}(x) = c_e(d)$, azaz az e' élen bármekkora forgalom esetén annyi az átjutási idő, mint az e élen maximális forgalom esetén.

A Pigou hálózatban egyensúlyt kapunk, ha mindenki az e élen megy; ebből a következő adódik:

$$POA(J(c,d)) = \frac{dc_e(d)}{\min_{0 \le x \le d} xc_e(x) + (d-x)c_e(d)} = \frac{dc_e(d)}{\min_{x \ge 0} xc_e(x) + (d-x)c_e(d)}. \tag{6}$$

A második egyenlőség abból adódik, hogy c_e monotonitása miatt a d felső korlátot elhagyhatjuk a képletből.

2.68. tétel. *Legyen J egy olyan közlekedési játék, ahol minden élköltség-függvényt $\mathcal{C}$-ből választunk. Ekkor létezik olyan $c \in \mathcal{C}$ és $d \in \mathbb{R}_+$, hogy $POA(J) \le POA(J(c,d))$.*

Bizonyítás. Legyen f egy egyensúlyi folyam J-ben, és legyen f^* az optimális folyam. A $c_e(f_e)$ élköltségekre nézve f csak legolcsóbb utakat használ, ezért

$$\sum_{e \in E} (f_e^* - f_e)c_e(f_e) \ge 0. \tag{7}$$

Egy adott $e \in E$ élhez nézhetjük a $J_e := J(c_e, f_e)$ Pigou-hálózatot. Ebben az anarchia árára (6)-ból a következő becslés adódik:

$$POA(J_e) \ge \frac{f_e c_e(f_e)}{f_e^* c_e(f_e^*) + (f_e - f_e^*)c_e(f_e)},$$

azaz

$$f_e^* c_e(f_e^*) \ge \frac{f_e c_e(f_e)}{POA(J_e)} + (f_e^* - f_e)c_e(f_e).$$

Legyen $\alpha = \max_{e \in E} POA(J_e)$; ekkor

$$c(f^*) = \sum_{e \in E} f_e^* c_e(f_e^*) \ge \sum_{e \in E} \frac{f_e c_e(f_e)}{\alpha} + \sum_{e \in E} (f_e^* - f_e)c_e(f_e)) \ge \frac{\sum_{e \in E} f_e c_e(f_e)}{\alpha} = \frac{c(f)}{\alpha},$$

ahol az utolsó előtti egyenlőtlenség (7)-ból következik. □

2.69. tétel. *Nem-atomos közlekedési játékban mindig van egyensúly. Ráadásul minden egyensúlynak ugyanaz a költsége.*

Bizonyítás. Definiáljuk a következő, folyamokon értelmezett ún. potenciálfüggvényt:

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(t)\, dt.$$

A c_e függvények folytonossága miatt Φ folytonosan differenciálható, monotonitásuk miatt pedig konvex. A folyamok halmaza konvex és kompakt, tehát Φ ezen felveszi a minimumát, ráadásul a konvexitás miatt minden lokális minimum egyben globális minimum.

Mivel Φ integrál-összegként van definiálva, egy $z \in \mathbb{R}^E$ irányra a Φ iránymenti deriváltja f-ben $\sum_{e\in E} z_e c_e(f_e)$. Így egy f folyam pontosan akkor minimalizálja Φ-t, ha tetszőleges f' folyamra

$$\sum_{e\in E}(f'_e - f_e)c_e(f_e) \geq 0.$$

Ez viszont pont azzal ekvivalens, hogy f csak legolcsóbb utakat használ a $c_e(f_e)$ élköltségekre nézve, tehát f egyensúly.

Tegyük fel, hogy f és f' is egyensúly, azaz mindkettő minimalizálja Φ-t. A konvexitás miatt ekkor

$$\sum_{e\in E}(f'_e - f_e)c_e(f_e) = \sum_{e\in E}(f'_e - f_e)c_e(f'_e) = 0,$$

azaz $\sum_{e\in E}(f'_e - f_e)(c_e(f'_e) - c_e(f_e)) = 0$. Viszont az összeg minden tagja nemnegatív a monotonitás miatt, tehát mindnek 0-nak kell lenni, amiből következik, hogy $c_e(f_e) = c_e(f'_e)$ minden $e \in E$ élre; következésképp $c(f) = c(f')$. $\square$

Nézzük azt az esetet, amikor $\mathcal{C}$ az affin függvények halmaza, azaz az $ax + b$ alakú függvényeké. Könnyű ellenőrizni, hogy az anarchia ára a Pigou-hálózatban akkor a legnagyobb, ha $b = 0$, és ekkor pontosan 4/3 (ezt úgy kapjuk, hogy $d/2$ folyam megy mind az e mind az e' élen). Tehát affin élköltség függvények esetén az anarchia ára nem lehet 4/3-nál nagyobb.

2.11.2. Atomos közlekedési játékok

A közlekedést úgy is modellezhetjük, hogy n darab közlekedő van, és mindegyik a forgalom n-ed részét adja. Ezt nevezzük atomos közlekedési játéknak (a fogalmat általánosabban is lehetne definiálni, az egyes közlekedőknek különböző súlyokat adva, de most csak ezzel az egyszerűbb modellel foglalkozunk). A formális definíció a következő: adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf s_i, t_i $(i = 1, \ldots, n)$ kijelölt csúcspárokkal, valamint minden $e \in E$ élre egy $c_e : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton növő függvény. Jelölje $\mathcal{P}_i$ az összes $s_i - t_i$ út halmazát Az i-edik játékos stratégia-halmaza $\mathcal{P}_i$, azaz egy $s_i - t_i$ utat választ. **Folyam** alatt most egy $f = (P_1, \ldots, P_n)$ útválasztást értünk, ahol $P_i \in \mathcal{P}_i$. Az $f = (P_1, \ldots, P_n)$ folyam értéke az $e \in E$ élen $f_e := |\{i : e \in P_i\}|$. Az f folyam **költsége** $c(f) = \sum_{e\in E} c_e(f_e)f_e$. Egy folyam **optimális**, ha minimális költségű, és **egyensúlyi**, ha tiszta Nash-egyensúly (ahol az i-edik játékos u_i nyeresége a költségének -1-szerese).

Először megmutatjuk, hogy itt nem maradnak igazak az előző alfejezetben megismert tételek: egyrészt nem minden egyensúlynak ugyanaz a költsége, másrészt lehet 4/3-nál nagyobb az anarchia ára affin élköltség-függvények esetén is. Ehhez tekintsük a következő 4-játékosos példát: 3 csúcs van, u, v, w, és 6 él a következő költség-függvényekkel: $c_{uv}(x) = c_{uw}(x) = c_{vw}(x) = c_{wv}(x) = x$, $c_{vu}(x) = c_{wu}(x) = 0$. A játékosok kezdő és végpont párjai: $(u, v), (u, w), (v, w), (w, v)$. Minden játékos két út közül választhat, az egyik egyetlen élből áll, a másik kettőből. Ha mindegyik játékos az előbbit választja, akkor mindegyiküknek 1 a költsége, tehát összesen 4. Könnyen látható, hogy ez optimális, és egyben egyensúly is. Azonban ha minden játékos a hosszabbik útját választja, az is egyensúly: az első két játékos költsége 4-4, a második kettőé 1-1, és kiszámolható, hogy ha egyetlen játékos megváltoztatja az útvonalát, akkor nem változik a költsége. Így van 10 költségű egyensúly is, tehát az anarchia ára 5/2.

2.70. megjegyzés. Be lehet látni, hogy affin élköltség-függvények esetén az anarchia ára nem lehet 5/2-nél nagyobb.

2.71. tétel (Rosenthal)**.** *Atomos közlekedési játékban mindig van tiszta Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. A bizonyítás erősen emlékeztet a 2.11.1 tétel bizonyítására. Egy adott $f = (P_1, \ldots, P_n)$ folyamhoz definiáljuk a következő potenciál-értéket:

$$\Phi(f) = \sum_{e\in E}\sum_{j=1}^{f_e} c_e(j).$$

Nézzük meg, hogyan változik a potenciál értéke, ha az i-edik játékos áttér a P_i' útra. Jelölje f' az így kapott folyamot; ekkor

$$\Phi(f') - \Phi(f) = \sum_{e\in E}\sum_{j=1}^{f_e'} c_e(j) - \sum_{e\in E}\sum_{j=1}^{f_e} c_e(j) = \sum_{e\in P_i'\setminus P_i} c_e(f_e') - \sum_{e\in P_i\setminus P_i'} c_e(f_e) = u_i(f) - u_i(f').$$

Ebből következik, hogy az a folyam, amire a potenciál-érték a legkisebb, egyben egyensúly is, hiszen egyetlen út megváltoztatásával nem nőhet a változtató játékos haszna. □

2.72. következmény. *Ha a játékosok kezdőpontjai és végpontjai egyformák, akkor polinom időben találhatunk tiszta Nash-egyensúlyt.*

Bizonyítás. Minden e élt helyettesítsünk n párhuzamos éllel, és ezek közül a j-edik élnek legyen a költsége $c_e(j)$. Legyen minden élnek 1 a felső kapacitása, és tekintsük az így kapott hálózatban a minimális költségű n nagyságú $s-t$ folyam feladatot. Figyeljük meg, hogy ha egy egészértékű f folyam a párhuzamos élek közül mindenhol a legolcsóbbakat használja, akkor költsége pont $\Phi(f)$. Így a minimális költségű n nagyságú folyam minimalizálja Φ-t, tehát Rosenthal tételének bizonyítása értelmében tiszta Nash-egyensúly. □

Fent láttunk példát, hogy atomos közlekedési játékban az anarchia ára affin élköltség-függvények esetén is lehet akár $5/2$. Most belátjuk, hogy ennél rosszabbat nem kaphatunk.

2.73. tétel. *Ha egy atomos közlekedési játékban a c_e élköltség-függvények $a_e x + b_e$ alakúak, ahol $a_e, b_e \geq$ ≥ 0, akkor az anarchia ára legfeljebb $5/2$.*

Bizonyítás. Legyen $f = (P_1, \dots, P_n)$ egy egyensúlyi folyam, és $f^* = (P_1^*, \dots, P_n^*)$ egy optimális folyam. Az egyensúly definíciója szerint minden $i \in [n]$-re és $P_i' \in \mathcal{P}_i$ útra teljesül, hogy

$$\sum_{e\in P_i} c_e(f_e) \leq \sum_{e\in P_i\cap P_i'} c_e(f_e) + \sum_{e\in P_i'\setminus P_i} c_e(f_e+1).$$

Használjuk ezt az egyenlőtlenséget a P_i^* utakra:

$$\begin{aligned} c(f) &= \sum_{i=1}^n \sum_{e\in P_i} c_e(f_e) \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{e\in P_i\cap P_i^*} c_e(f_e) + \sum_{e\in P_i^*\setminus P_i} c_e(f_e+1) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{e\in P_i^*} c_e(f_e+1) = \sum_{e\in E} c_e(f_e+1) f_e^* = \sum_{e\in E} (a_e f_e^*(f_e+1) + b_e f_e^*). \end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő mennyiség becslésére az alábbi lemmát használjuk.

2.74. lemma. *Tetszőleges y és z nemnegatív egészekre teljesül, hogy $y(z+1) \leq \frac{5}{3}y^2 + \frac{1}{3}z^2$.*

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség teljesül, ha $y = 0$. Tegyük fel, hogy $y \geq 1$, és legyen $z = \alpha y$. Ekkor az egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\frac{1}{y} \leq \frac{5 + \alpha^2 - 3\alpha}{3}.$$

A jobboldal minimuma $\alpha = 3/2$-nél $11/12$. Tehát csak $y = 1$-et kell ellenőrizni, és könnyen látható, hogy $\alpha \in \{1{,}2\}$ esetén egyenlőség van, egyébként pedig a jobboldal nagyobb. □

A lemmát minden élre használva $y = f_e^*$ és $z = f_e$ értékekkel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c(f) &\leq \sum_{e\in E} (a_e f_e^*(f_e+1) + b_e f_e^*) \leq \sum_{e\in E} \left(a_e \left(\frac{5}{3}(f_e^*)^2 + \frac{1}{3} f_e^2 \right) + b_e f_e^* \right) \\ &\leq \frac{5}{3} \sum_{e\in E} (a_e f_e^* + b_e) f_e^* + \frac{1}{3} \sum_{e\in E} (a_e f_e + b_e) f_e = \frac{5}{3} c(f^*) + \frac{1}{3} c(f), \end{aligned}$$

azaz $c(f) \leq \frac{5}{2} c(f^*)$, és ezzel a tételt beláttuk. □

3. Többlépéses szekvenciális játékok

A stratégiai játékok fejezet bevezetőjében láttuk, hogy a kombinatorikus játékok is felírhatók stratégiai játékként; sőt, általánosabban a többlépéses szekvenciális játékok is tekinthetők egylépéses szinkron stratégiai játéknak, ahol a „lépés” a játékosok stratégiaválasztása az egész játékra. Az egyik probléma ezzel a megközelítéssel, hogy a kevert stratégiák fogalma lényegében kezelhetetlen lesz. Kevert stratégiaként ugyanis a stratégiáknak bármilyen konvex kombinációja választható, márpedig a szekvenciális játékokban általában nagyon sok féle lehetséges stratégia van. Ennek a problémának a kezelésére vezetjük be a többlépéses szekvenciális játékok egy általános modelljét, valamint a „viselkedési stratégiák” fogalmát, ami a kevert stratégiáknak egy szűkítése.

3.1. Extenzív alakban adott játékok

Az egyszerűség kedvéért csak véges játékokkal foglalkozunk. Egy **extenzív alakú játék** egy $D = (V, E)$ fenyővel van adva, aminek csúcsai a döntési helyzeteknek, a csúcsból kilépő élek pedig a lehetséges döntéseknek felelnek meg. Egy n-játékosos játékban a csúcshalmaz fel van partícionálva $V_L, V_N, V_1, \dots, V_n$ részekre. A V_L csúcshalmaz a leveleket tartalmazza; minden $v \in V_L$ levélben adott egy $u_1(v), \dots, u_n(v)$ vektor, ami megadja a játékosok nyereségét, ha v-be jutunk. A V_N halmaz csúcsaiban a „természet” hoz véletlen döntéseket; ez a halmaz lehet üres. Minden V_i $(i = 1, \dots n)$ halmaznak adott egy további $V_i^1, \dots, V_i^{k_i}$ partíciója, ezeket **információs halmazoknak** nevezzük. Szemléletesen azt jelentik, hogy amikor az i-edik játékos egy V_i^j-beli csúcsban hoz döntést, akkor nem tudja, hogy V_i^j melyik csúcsában van. Ezzel tudjuk modellezni azt, hogy egy játékos nem feltétlenül tud a többi játékos (és a természet) minden korábbi döntéséről.

Minden egyes $v \in V_N$ csúcsnál minden $e \in \delta^{out}(v)$ élhez tartozik egy p_e valószínűség, amiknek összege 1. Ez adja meg annak valószínűségét, hogy v-ből az e élen lépünk tovább. Minden egyes $v \in \cup_{i=1}^n V_i$ csúcsnál minden $e \in \delta^{out}(v)$ élnek van egy címkéje és ezek a címkék különbözőek. A következő tulajdonságok teljesülését várjuk el:

– egy V_i^j halmaz nem tartalmazhat D egy irányított útjából több pontot

– ha $u, v \in V_i^j$, akkor $\delta^{out}(u)$ és $\delta^{out}(v)$ élein ugyanaz a címkék halmaza.

Amikor egy játékos egy $v \in V_i^j$ csúcsban dönt, egy címkét választ, nem egy élt, hiszen nem tudja, V_i^j melyik csúcsában van. A második tulajdonság garantálja, hogy V_i^j minden csúcsában ugyanazok a címkék. Az első tulajdonság miatt ha egy játékos nem tudja hogy két csúcs közül melyikben van, akkor nem lehet az egyik a másiknak az előzménye. Jelölje C_i^j a V_i^j-beli csúcsokból kilépő élek címkéinek halmazát.

A definíció megengedi, hogy két V_i^j-beli pontnak a fenyőben a közös őse szintén V_i-beli legyen, vagy hogy a közös ősből a két V_i^j-beli pontba menő úton az i-edik játékos különböző döntéseket hozzon. Ez azt jelenti, hogy a játékos „nem emlékszik” a korábbi döntésére, mikor a V_i^j-beli pontban döntést kell hoznia. Ha ezt nem engedjük meg, akkor **felejtésmentes játékról** beszélünk. Ha minden V_i^j halmaz egyelemű, akkor a játék **teljes információjú**.

Az i-edik játékos **tiszta stratégiái** a $C_i^1 \times C_i^2 \times \ldots \times C_i^{k_i}$ halmaz elemei. Annak felelnek meg, hogy az egyes V_i^j $(j = 1, \dots, k_i)$ információs halmazokból milyen címkéjű élen akar kilépni. Ha minden játékos választ egy tiszta stratégiát, kapunk egy valószínűségi eloszlást a leveleken a természet döntései alapján. Ez eszerinti várható értékek adják meg az egyes játékosok várható nyereségeit erre a stratégiavektorra. A játékot tehát stratégiai alakban is felírhatjuk ezekkel a tiszta stratégiákkal és nyereségekkel.

Az extenzív alak fő vonzereje, hogy megadhatjuk a kevert stratégiáknak egy jobban kezelhető részhalmazát. Az i-edik játékos egy **viselkedési stratégiája** az, hogy minden $j \in [k_i]$-re megad a C_i^j halmazon egy valószínűségi eloszlást. A játék során az i-edik játékos függetlenül választ ezek szerint az eloszlások szerint a C_i^j halmazokból. Ha minden játékos választ egy viselkedési stratégiát, ahhoz is tartozik egy valószínűségi eloszlás a leveleken, és így egy várható nyereség minden játékosnak.

Példaként tekintsük a következő egyszerű kétszemélyes kártyajátékot: mindkét játékos betesz 1 Ft tétet. Az osztó oszt egy lapot egy 52 lapos pakliból az első játékosnak, ezután az első játékos dönthet, hogy passzol, vagy emeli a tétet 1 Ft-tal. Ha passzolt, akkor a második játékos nyer és megkapja az összes pénzt. Ha emelt, akkor az osztó oszt a második játékosnak is egy lapot. Ő szintén dönthet, hogy passzol, vagy megadja a tétet (betesz 1 Ft-ot). Ha passzolt, az első játékos nyer, ha pedig megadta a tétet, felfedik a lapjaikat, és az erősebb lap nyer.

Mindkét játékosnak 2^{52} db tiszta stratégiája van, hiszen a lapja függvényében döntheti el, hogy passzol vagy nem. Egy kevert stratégia tehát egy valószínűségi eloszlás egy 2^{52} elemű halmazon. Ezzel szemben egy viselkedési stratégiában csak azt kell megadnunk, hogy adott lap esetén milyen valószínűséggel passzolunk, így ez 52 db valószínűségi eloszlás egy kételemű halmazon.

Igaz-e, hogy a viselkedési stratégiák között is mindig van kevert Nash-egyensúly? Nem feltétlenül, még kétszemélyes 0-összegű játéknál is van olyan példa, ahol viselkedési stratégiával nem érhető el a biztonsági szint, és így Nash-egyensúly sem lehet. Azonban Kuhn alapvető tétele kimondja, hogy *felejtésmentes* játék esetén már igen a válasz. Sőt, ennél jóval erősebb igaz. Nevezzük az i-edik játékos σ_i és σ_i' kevert stratégiáját **ekvivalensnek**, ha tetszőleges $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$ esetén $u_l(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_l(\sigma_i', \sigma_{-i})$ $(l = 1, \ldots, n)$.

3.1. tétel (Kuhn, 1953)**.** *Tekintsünk egy felejtésmentes, extenzív alakban adott játékot, és legyen σ_i az i-edik játékos egy kevert stratégiája. Ekkor van σ_i-vel ekvivalens viselkedési stratégia.*

A tételből következik viselkedési Nash-egyensúly létezése. Legyen ugyanis σ egy tetszőleges kevert Nash-egyensúly, és legyen σ_i^* egy σ_i-vel ekvivalens viselkedési stratégia ($i \in [n]$). Tekintsünk adott i-re egy $\sigma_i' \in \Delta_i$ kevert stratégiát. Az ekvivalenciákból és abból, hogy σ Nash-egyensúly, következik hogy

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*) = u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \leq u_i(\sigma) = u_i(\sigma^*),$$

tehát σ^* Nash-egyensúly.

3.2. megjegyzés. Ha a játék nem felejtésmentes, akkor előfordulhat, hogy nem is létezik viselkedési Nash-egyensúly. Tekintsük például az „azonos érmék” játék következő változatát. Először az első játékos választ fejet vagy írást, utána a második játékos (aki nem ismeri az első választását). Van azonban egy harmadik kör is, ahol megint az első játékos választ egy másik érmével, viszont ekkor nem emlékszik az első választására (és persze a második játékos választását sem ismeri). A hasznosságok a következők:

1. \ 2.	Fej	Írás
F,F	1, -1	-1, 1
F,I	-2, 2	-2, 2
I,F	-2, 2	-2, 2
I,I	-1, 1	1, -1

Mivel az (F, I) és (I, F) az első játékos szigorúan dominált stratégiái, ezek csak 0 valószínűséggel szerepelhetnek kevert Nash-egyensúlyban. Azonban az első játékos a második választásánál nem emlékszik az elsőre, tehát a játék fájában a második választásához tartozó csúcsok egy információs halmazban vannak. Ez azt jelenti, hogy csak két olyan viselkedési stratégiája van, amiben (F, I) és (I, F) 0 valószínűségű: a tiszta (F, F) és a tiszta (I, I). Ezek azonban nem adnak Nash-egyensúlyt: (F, F)-re a második játékos legjobb válasza I, amire az első játékos legjobb válasza (I, I); hasonlóan, (I, I)-re a második játékos legjobb válasza F, amire az első játékos legjobb válasza (F, F). Így nincs viselkedési Nash-egyensúly.

3.2. Részjáték-perfekt egyensúly

A 2.3 fejezetben elemeztük az alábbi „nemek harca” játékot, ahol a lány inkább Quimby koncertre menne, a fiú inkább Tankcsapdára, de mindenképp együtt szeretnének szórakozni. A két tiszta Nash-egyensúly (mindketten ugyanarra a koncertre mennek) mellett van egy kevert is: a lány 2/3, a fiú pedig 1/3 valószínűséggel választja a Quimby-t.

Fiú \ Lány	Quimby	Tankcsapda
Quimby	1, 2	0, 0
Tankcsapda	0, 0	2, 1

Nézzük most a játéknak azt a változatát, ahol előbb a lány dönt, hogy melyik koncertre megy, és ezt közli a fiúval, aki már ennek tudatában dönt. A játék stratégiai alakja annyiban változik, hogy a fiúnak immár 4 stratégiája van: melyik koncertre megy ha a lány Quimby-re, és melyikre ha a lány Tankcsapdára.

Fiú \ Lány	Quimby	Tankcsapda
(Q,Q)	1, 2	0, 0
(Q,T)	1, 2	2, 1
(T,Q)	0, 0	0, 0
(T,T)	0, 0	2, 1

Itt három tiszta Nash-egyensúly van: ((Q,Q), Quimby), ((Q,T), Quimby), és ((T,T), Tankcsapda) – emellett kevert egyensúlyok is vannak, de ezekkel most nem foglalkozunk. Vannak érvek amellett, hogy a három közül csak ((Q,T), Quimby) tekinthető racionálisnak, a másik két egyensúlynál a játékosok valamilyen értelemben irracionálisan viselkednek. A ((Q,Q), Quimby) esetben a fiú Quimby-re menne, ha a lány Tankcsapdára, ami ellentmond a saját preferenciáinak. A ((T,T), Tankcsapda) esetben pedig a lány a fiú „fenyegetése” miatt dönt a Tankcsapda mellett, pedig ez a fenyegetés a lány döntésekor még nem következett be, hiszen a lány dönt előbb.

Ezeknek az irracionalitásoknak a kiküszöbölésére találták ki a részjáték-perfekt egyensúly fogalmát. A definíciókat először csak a teljes információjú esetre adjuk meg. Egy J teljes információjú játék **részjátéka** a D fenyő egy tetszőleges v nem-levél csúcsának a leszármazottaiból álló részfenyő által meghatározott játék; jelöljük ezt J_v-vel. A J_v játék szintén teljes információjú, és a J játék tetszőleges viselkedési stratégiája megszorítható erre a részjátékra. A J játék egy viselkedési stratégiája **részjáték-perfekt egyensúly**, ha minden J_v részjátékra megszorítva Nash-egyensúly.

A fenti példában ((Q,Q), Quimby) és ((T,T), Tankcsapda) nem részjáték-perfekt egyensúlyok: az előbbinél a lány „Tankcsapda” választása alatti részjátékban, az utóbbinál pedig a lány „Quimby” választása alatti részjátékban nem kapunk Nash-egyensúlyt.

3.3. tétel. *Teljes információjú játékban mindig van tiszta részjáték-perfekt egyensúly.*

Bizonyítás. A tiszta részjáték-perfekt egyensúlyt úgy konstruáljuk meg, hogy a levelektől felfele haladva rögzítjük a csúcsokban, hogy milyen döntést hoznak. Legyen $v \in V_i$ egy olyan csúcs a fában, aminek az összes $V_1 \cup \ldots \cup V_n$-beli leszármazottjában már kiválaszottuk a kilépő élt. Ekkor az összes v-ből kilépő élre ki tudjuk számolni, hogy azt választva mennyi az i-edik játékos várható nyeresége a J_v részjátékban. Válasszuk azt az élt, ahol ez a legnagyobb. Ezt ismételgetve minden $V_1 \cup \ldots \cup V_n$-beli csúcsra meghatározhatjuk a kilépő élt.

Belátjuk, hogy az így kapott s stratégia-vektor részjáték-perfekt egyensúly. Mivel az algoritmus minden részjátékra is ugyanúgy működik, elég belátni, hogy s Nash-egyensúly. Tegyük fel hogy nem, azaz létezik i és $s'_i \in S_i$, hogy $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$. Válasszuk s'_i-t úgy, hogy a lehető legtöbb helyen megegyezzen s_i-vel. Legyen $v \in V_i$ egy olyan csúcs, amiben eltér s_i és s'_i választása, viszont az összes V_i-beli leszármazottjában s_i és s'_i ugyanazt a kilépő élt választja. Jelölje u_i^v az i-edik játékos hasznát a J_v játékban. Legyen s''_i az s'_i-ből kapott stratégia, ha a v csúcs a kilépő élt s_i szerint választja s'_i helyett. A konstrukció miatt $u_i^v(s''_i, s_{-i}) = u_i^v(s) \geq u_i^v(s'_i, s_{-i})$. Mivel a többi ágban nem változik az i-edik játékos haszna, azt kaptuk, hogy $u_i(s''_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$. De ez ellentmond s'_i választásának, hiszen s''_i több helyen egyezik meg s_i-vel. $\square$

A részjáték fogalma kiterjeszthető nem teljes információjú játékokra is. Ebben az esetben **részjátéknak** az olyan J_v játékokat nevezzük, ahol tetszőleges i-re és j-re a V_i^j információs halmaz vagy része a v alatti részfenyőnek, vagy diszjunkt tőle. Figyeljük meg, hogy a teljes játék mindig egyben részjáték is. A részjáték-perfekt egyensúly definíciója változatlan: olyan viselkedési stratégia, ami minden részjátékra megszorítva Nash-egyensúly. Ha a nemek harca játéknak azt a változatát nézzük, ahol a lány ugyan előbb dönt, de nem árulja el a döntését a fiúnak, akkor az egyetlen részjáték a teljes játék lesz, tehát minden Nash-egyensúly egyben részjáték-perfekt egyensúly.

3.4. tétel. *Felejtésmentes játékban mindig van részjáték-perfekt egyensúly.*

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy a részjátékok is felejtésmentesek. Legyen V^* azoknak a $v \in V_N \cup V_1 \cup \cup \ldots \cup V_n$ csúcsoknak a halmaza, amikre J_v részjáték. A részjáték-perfekt egyensúly megkonstruálásához válasszunk egy olyan $v \in V^*$ csúcsot, aminek nincs V^*-beli leszármazottja. A 3.1 tétel szerint J_v-ben van olyan σ^v viselkedési stratégia-vektor, ami (kevert) Nash-egyensúly. Rögzítsük ezt a viselkedési stratégiát a v csúcsnál és a leszármazottainál; töröljük a v csúcs leszármazottait, a v csúcsra pedig írjuk rá nyereségként a σ^v szerinti várható nyereségeket. Ezt ismételgetve meghatározunk egy σ viselkedési stratégiát.

Az előző bizonyításhoz hasonlóan elég belátni, hogy σ Nash-egyensúly, hiszen minden részjátékra ugyanazt adja az algoritmus, ha önmagában egy játékként tekintünk rá. Tegyük fel indirekt, hogy σ nem Nash-egyensúly, azaz létezik i és $\sigma'_i \in \Delta_i$, hogy $u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma)$ (bár σ'_i-t tiszta stratégiának is választhatnánk, most kevert stratégiát fogunk használni). A 3.1 tétel szerint σ'_i választható viselkedési stratégiának; válasszuk úgy, hogy a lehető legtöbb részjátékban megegyezzen σ_i-vel. Legyen $v \in V^*$ egy olyan csúcs, ahol σ_i és σ'_i eltér, de v-nek az összes $w \in V^*$ leszármazottjára σ_i és σ'_i ugyanaz J_w-re megszorítva. Jelölje u_i^v az i-edik játékos várható hasznát a J_v játékban. Legyen σ''_i a σ'_i-ből kapott stratégia, ha a v csúcs azon V_i-beli leszármazottaiban változtatjuk σ_i-re a stratégiát, akik nem szerepelnek v leszármazottjához tartozó részjátékban. Mivel minden részjáték minden információs halmazt vagy teljes egészében tartalmaz vagy diszjunkt tőle, σ''_i egy érvényes viselkedési stratégia lesz. Mivel σ Nash-egyensúly a J_v részjátékban és J_v-re megszorítva σ''_i megegyezik σ_i-vel, $u_i^v(\sigma''_i, \sigma_{-i}) = = u_i^v(\sigma) \geq u_i^v(\sigma'_i, \sigma_{-i})$. Mivel a többi ágban nem változik az i-edik játékos haszna, azt kaptuk, hogy $u_i(\sigma''_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma)$. Ez pedig ellentmond σ'_i választásának, hiszen σ''_i több részjátékban egyezik meg σ_i-vel. □

3.3. Szekvenciális egyensúly

Az egyensúly fogalmát sokszor olyan, nem teljes információs játékokban akarjuk vizsgálni, ahol a játékosok véletlenszerűen bizonyos típusokba sorolódnak, de egy játékos csak a saját típusát ismeri, a többi játékosét nem. Az ilyen játékok extenzív alakjában a gyökér V_N-ben van, és a belőle kilépő élek határozzák meg a játékosok típusait. Könnyen látható, hogy az egyetlen részjáték a teljes játék, hiszen minden más részfa szétvág információs halmazt. A részjáték-perfekt egyensúly fogalma tehát itt egybeesik a Nash-egyensúlyéval. Az irracionális egyensúlyok kiszűrésére további finomításra van szükség.

3.5. definíció. Az i-edik játékos **világképe** egy $p_i : V_i \to \mathbb{R}_+$ függvény, amelyre teljesül, hogy tetszőleges V_i^j információs halmazra $\sum_{v \in V_i^j} p_i(v) = 1$. Tekinthetjük úgy, hogy $v \in V_i^j$ esetén $p_i(v)$ a játékos becslése arra, hogy V_i^j-n belül milyen valószínűséggel van valójában v-ben. **Világkép-vektor** alatt egy $(p_1, \ldots, p_n)$ vektort értünk, ahol p_i az i-edik játékos egy világképe.

Egy szekvenciális egyensúlyban a játékosoknak nem csak stratégiája, hanem világképe is van. Hogy megértsük, mi a szekvenciális egyensúly, először definiálnunk kell, hogy a játékosok világképe mikor konzisztens egy σ viselkedési stratégia-vektorral. Vegyük észre, hogy a σ viselkedési stratégia-vektor meghatároz egy $p_\sigma : V \to \mathbb{R}_+$ függvényt: ha minden játékos σ szerint játszik, akkor melyik csúcsba milyen valószínűséggel jutunk el. A konzisztencia informálisan azt jelenti, hogy $p_i(v)$ megegyezik a p_σ szerinti feltételes valószínűséggel a V_i^j halmazon, azaz $p_i(v) = p_\sigma(v) / \sum_{w \in V_i^j} p_\sigma(w)$. Ezzel a definícióval az a gond, hogy a nevező lehet 0, úgyhogy a formális definíció kicsit rafináltabb.

3.6. definíció. Az i-edik játékos p_i világképe **konzisztens** a σ viselkedési stratégia-vektorral, ha létezik teljesen kevert viselkedési stratégia-vektoroknak olyan $\sigma^1, \sigma^2, \ldots$ konvergens sorozata, ami tart σ-hoz, és tetszőleges $v \in V_i^j$-re a $p_{\sigma^k}(v) / \sum_{w \in V_i^j} p_{\sigma^k}(w)$ sorozat tart $p_i(v)$-hez, ha $k \to \infty$. (Figyeljük meg, hogy itt a nevező mindig pozitív, mert a stratégiák teljesen kevertek, azaz minden él valószínűsége pozitív. Ha $\sum_{w \in V_i^j} p_\sigma(w) > 0$, akkor a folytonosság miatt $p_i(v) = p_\sigma(v) / \sum_{w \in V_i^j} p_\sigma(w)$ minden $v \in \in V_i^j$-re.)

A $(p_1, \ldots, p_n)$ világkép-vektor **konzisztens** a σ viselkedési stratégia-vektorral, ha létezik teljesen kevert viselkedési stratégia-vektoroknak olyan $\sigma^1, \sigma^2, \ldots$ konvergens sorozata, ami tart σ-hoz, és tetszőleges V_i^j információs halmazra és $v \in V_i^j$-re a $p_{\sigma^k}(v) / \sum_{w \in V_i^j} p_{\sigma^k}(w)$ sorozat tart $p_i(v)$-hez, ha $k \to \infty$.

3.7. lemma. *Ha a játék felejtésmentes, és p_i konzisztens σ-val, akkor tetszőleges σ_i' viselkedési stratégiára p_i konzisztens (σ_i', σ_{-i})-vel is.*

Bizonyítás. Ha v és w a V_i^j információs halmaz két pontja, akkor a felejtésmentesség miatt a közös ősüktől beléjük vezető úton az i-edik játékos ugyanazokat a döntéseket hozza. Ezért a V_i^j-beli feltételes valószínűségeket nem befolyásolják az i-edik játékos döntései (legalábbis teljesen kevert stratégiák esetén), csak a többi játékos döntései. □

A szekvenciális egyensúly fogalmát Kreps és Wilson vezette be. Adott V_i^j információs halmazra és p_i világképre legyen $J_i^j(p_i)$ az a játék, ahol a gyökérből minden $v \in V_i^j$-be megy egy $p_i(v)$ valószínűségű él (azaz a gyökérben a természet dönt ilyen valószínűségekkel), V_i^j csúcsaitól kezdeve pedig az eredeti játékot játsszuk. Megjegyezzük, hogy $J_i^j(p_i)$ csak p_i-nek a V_i^j halmazon felvett értékeitől függ. Adott σ viselkedési stratégia-vektorra legyen $u_i^j(p_i, \sigma)$ az i-edik játékosnak a haszna, ha $J_i^j(p_i)$-ben mindenki a σ stratégia szerint lép.

3.8. definíció. A $p = (p_1, \ldots, p_n)$ világkép-vektor és a σ viselkedési stratégiavektor együtt egy **szekvenciális egyensúly**, ha egyrészt p konzisztens σ-val, másrészt tetszőleges V_i^j információs halmazra $u_i^j(p_i, \sigma) \geq u_i^j(p_i, (\sigma_i', \sigma_{-i}))$ minden olyan σ_i'-re, amit σ_i-nek a C_i^j-n való megváltoztatásával kapunk.

A definíció szemléletes jelentése az, hogy ha a játékot a V_i^j halmazból kezdenénk a p_i által adott valószínűségekkel, és az i-edik játékos ismerné a többiek stratégiáját, akkor se tudna V_i^j-ből jobb kilépő élt választani.

3.9. tétel. *Ha a (p, σ) pár szekvenciális egyensúly, akkor σ részjáték-perfekt egyensúly.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, és legyen J_v egy olyan részjáték, amiben σ nem Nash-egyensúly, de minden v alatti részjátékban már az. Ekkor létezik i és σ_i' viselkedési stratégia J_v-ben, hogy $u_i^v(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i^v(\sigma)$. Válasszuk σ_i'-t úgy, hogy a legtöbb helyen megegyezzen σ_i-vel, és legyen V_i^j egy olyan információs halmaz a J_v részjátékon belül, amiből kilépő éleken σ_i és σ_i' nem egyezik meg, de a V_i^j alatti részfákon megegyezik (a felejtésmentesség miatt ilyen van: ha egy V_i^l információs halmaz egy pontjának van V_i^j-beli őse, akkor minden pontjának van). Vegyük észre, hogy p_i a J_v részjátékon belül is konzisztens σ-val (itt kihasználjuk, hogy a konzisztenciát a 0 valószínűségű ágakra is definiáltuk a kovergenciával, hiszen lehet hogy v-be 0 valószínűséggel jutunk el a σ stratégiák szerint lépve). Legyen σ_i'' az a viselkedési stratégia, amit σ_i'-ből kapunk úgy, hogy a V_i^j-ből kimenő éleken σ_i-re változtatjuk.

A 3.7 lemma miatt p_i konzisztens a $(\sigma_i'', \sigma_{-i})$ stratégia-vektorral is J_v-ben. Mivel a szekvenciális egyensúlyban optimálisan választjuk a V_i^j-ből kilépő címkéken az eloszlást, és a V_i^j alatti részfákon σ_i és σ_i' megegyezik, $u_i^v(\sigma_i'', \sigma_{-i}) \geq u_i^v(\sigma_i', \sigma_{-i})$, tehát $u_i^v(\sigma_i'', \sigma_{-i}) > u_i^v(\sigma)$. Mivel σ_i'' több helyen egyezik meg σ_i-vel, mint σ_i', ez ellentmond σ_i' választásának. □

A következő tételt bizonyítás nélkül közöljük. A bizonyítás azért nehezebb mint a 3.4 tételé, mert különböző játékosok információs halmazai nem feltétlenül állíthatók sorrendbe (előfordulhat, hogy az egyik ágon az egyik játékos dönt előbb, a másikon a másik, de nem tudnak egymás döntéseiről), így nem lehet a fában felfele haladni a konstrukcióval.

3.10. tétel (Kreps, Wilson). *Felejtésmentes játékban mindig van szekvenciális egyensúly.* □

3.11. megjegyzés. A fejezet elején említettük azt a játéktípust, ahol a játékosok az elején véletlenszerű típusokba sorolódnak valamilyen valószínűségekkel, és mindenki csak a saját típusát ismeri. Könnyű látni, hogy ha egy p világkép-vektor konzisztens egy σ viselkedési stratégia-vektorral, akkor p a helyes valószínűségeket adja arra nézve, hogy a gyökér melyik szomszédja alatt vagyunk, azaz mik a játékosok típusai. Valóban, p_σ szükségszerűen a helyes valószínűségeket tartalmazza, így a konzisztencia miatt p is.

Példaként tekintsük az alábbi **sör-limonádé játékot**. Az első játékos 0,9 valószínűséggel erős és 0,1 valószínűséggel gyenge (ez a természet döntése a gyökérben). Ül a kocsmában a pultnál, és el kell döntenie, hogy sört vagy limonádét rendel. Ha erős, akkor a sört kedveli jobban, ha gyenge, akkor a limonádét (1 haszon, ha a preferált italt issza).

A második játékos kötekedő típus: megfigyeli, hogy az első játékos mit iszik, és ez alapján el kell döntenie, hogy belekössön-e. Ha gyengébe köt bele, 1 a haszna, ha erősbe, -1. Az első játékos egyáltalán nem szeretne konfliktust, tehát 2-vel csökken a haszna, ha belekötnek, függetlenül attól hogy gyenge vagy erős.

A játékban van két tiszta szekvenciális egyensúly (egyéb egyensúlyok is vannak, de azokkal most nem foglalkozunk).

1. Az első játékos mindenkép sört iszik. A második játékos világképe szerint aki sört iszik, az 0,9 valószínűséggel erős és 0,1 valószínűséggel gyenge, míg a limonádé-ivók mind gyengék. A limonádé-ivókba beleköt, a sörivókba nem. Könnyű ellenőrizni, hogy teljesülnek a szekvenciális egyensúly feltételei: a konzisztenciához σ^k-t például kaphatjuk úgy, hogy az első játékos k^{-1} valószínűséggel iszik limondádét ha gyenge, és k^{-2} valószínűséggel ha erős.

2. Az első játékos mindenképp limonádét iszik. A második játékos világképe szerint aki limonádét iszik, az 0,9 valószínűséggel erős és 0,1 valószínűséggel gyenge, míg a sörivók mind gyengék. A sörivókba beleköt, a limonádé-ivókba nem. Ez az egyensúly talán kevésbé tűnik reálisnak mint az előző, de ugyanúgy teljesíti a szekvenciális egyensúly feltételeit.

Most módosítsuk a játékot úgy, hogy a második játékosnak csak akkor 1 a haszna, ha gyenge limonádé-ivóba köt bele; ha gyenge sörivóba, akkor -1. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti két egyensúly továbbra is Nash-egyensúly, és így részjáték-perfekt egyensúly is, hiszen az egyetlen részjáték a teljes játék. Viszont a második immár nem szekvenciális egyensúly: a második játékos a sörivókkal szemben nem az optimális lépést választja (bármilyen világképe is van, egy sörivóba jobb nem belekötnie).

Próbáljuk meg felsorolni az összes szekvenciális egyensúlyt ebben a módosított játékban! A második játékos sörivókba semmiképp se köt bele. Ezért az első játékos, ha erős, mindenképp sört iszik, hiszen így jár jobban. Tegyük fel, hogy gyengeként pozitív valószínűséggel iszik limonádét. Ekkor a konzisztencia miatt a második játékos világképében a limonádé-ivók mind gyengék, tehát beléjük fog kötni. Így viszont a gyenge első játékos rosszul jár a limonádé-ivással, tehát ilyen szekvenciális egyensúly nem lehet. Azt kaptuk, hogy az első játékos minden szekvenciális egyensúlyban mindig sört iszik. Az is következik, hogy a második játékos a limonádé-ivókba legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel beleköt, különben egy gyenge első játékosnak megérné limonádét rendelni. Legyen q ez a valószínűség.

Mi lehet a második játékos világképe? A konzisztencia miatt a sörivókat 0,9 valószínűséggel erősnek, 0,1 valószínűséggel gyengének tippeli. A limonádé-ivókról alkotott világképe q-tól függ.

– Ha $\frac{1}{2} \leq q < 1$, akkor a második játékosnak mindegy, hogy a limonádé-ivókba beleköt vagy sem. Ezért a világképe csak az lehet, hogy a limonádé-ivók $\frac{1}{2}$ valószínűséggel erősek.

– Ha $q = 1$, akkor a második játékos világképében a limonádé-ivók legfeljebb $\frac{1}{2}$ valószínűséggel erősek. Bármilyen 0 és $\frac{1}{2}$ közti számra lehet σ^k sorozatot definiálni, ahol a limonádé-ivók közt az erősek aránya ahhoz tart, tehát ezek mind előfordulhatnak világképként.

4. Mechanizmustervezés

A mechanizmustervezésben konkrét játékok elemzése helyett célunk azok megkonstruálása: valamilyen piaci vagy politikai szituációban szeretnénk igazságos elosztási vagy döntési eljárásokat létrehozni. Általában egy **közösségi döntést** keresünk: adott lehetséges kimenetelek egy halmaza (az alábbi esetben a pizza összes lehetséges darabolásai). Egy csoport minden tagjának vannak (csak számára ismert) preferenciái vagy értékelési függvénye az alternatívákon. Valamilyen meghatározott eljárás keretében saját preferenciáik alapján döntéseket hoznak. Célunk egy olyan eljárás tervezése, amely bizonyos szempontok szerint igazságosnak tekinthető.

4.1. Pizzaszeletelés, avagy igazságos felosztás

Egy egyszerű példa a pizzaszeletelés: egy többféle feltétes pizzát szeretne két ember igazságosan elosztani. A feltéteket illetően ízléseik különbözőek lehetnek. A közismert osztozkodási szabály (cut and choose) szerint először az egyikük két részre osztja a pizzát, a másik pedig kiválasztja a két szelet közül az egyiket.

A preferenciák mindkettejük számára egy-egy mértéket (az *Analízisben* használt értelemben) határoznak meg a pizzán. Például lehet, hogy valakinek a zelleres feltét kétszer jobban ízlik, mint a brokkolis, ezért egy szelet a zelleres részből számára egy kétszer akkora brokkolissal egyenértékű, a másik játékosnál viszont éppen fordított a helyzet. A fenti osztozkodási szabály mindkettejük számára garantálja, hogy a saját mértékük szerint legalább a felét megkaphatják: az osztó a saját preferenciájának megfelelően két egyenlő részre vágva tudja ezt garantálni, a választó játékos pedig a saját mértékének megfelelően a nagyobbik (nem kisebbik) darabot választva.

Mi a helyzet több játékos esetén? Tegyük fel, hogy az n játékos mindegyikének van egy különböző mértéke a P pizzán, ezek $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Akkor definiáljuk igazságosnak a mechanizmust, ha mindegyik játékos számára garantálható, hogy a végén neki jutó A_i darabra $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(P)/n$, vagyis a saját mértéke szerint legalább az n-ed részt kapja, még akkor is, ha az összes többi játékos összefogna ellene. Feltesszük (az előbb már impliciten használt) oszthatósági tulajdonságot: ha egy játékos előtt tetszőleges $T \subseteq P$ darab fekszik, és $0 < \alpha < 1$ tetszőleges racionális szám, akkor fel tudja osztani T-t T_1 és T_2 részekre, hogy $\mu_i(T_1) = \alpha\mu_i(T)$, $\mu_i(T_2) = (1-\alpha)\mu_i(T)$.

Indukcióval definiálhatunk igazságos mechanizmust. Tegyük fel, hogy $n-1$ részre már tudunk igazságosan osztani. Osszuk hát így el az első $n-1$ játékos között. Ezután mindegyik játékos ossza fel n részre a saját darabját. Az n. játékos az összes többi játékos n darabja közül válasszon egyet-egyet.

4.1. állítás. *A fenti mechanizmus n játékos számára igazságos.*

Bizonyítás. Legyen $B_1, \ldots, B_{n-1}$ az indukció szerint kapott darabolás. Először lássuk be, hogy az n. játékos számára igazságos. Mindegyik B_i n darabra van osztva, ezek közül a μ_n szerinti legnagyobb darabot választva mindegyiknek legalább az $\frac{1}{n}$-ed része jut, ami a teljes pizzának legalább az n-ed részét jelenti tehát. Az $i < n$ játékosnak az indukció szerint garantáltuk, hogy $\mu_i(B_i) \geq \mu_i(P)/(n-1)$. Ha ő a saját darabját μ_i szerint n egyenlő részre osztja, akkor ennek $\frac{n-1}{n}$-ed része megmarad, vagyis összesen legalább $\mu_i(P)/n$ mértékű darab jut. □

Ez az eljárás egy játékosnak nem feltétlenül egyetlen összefüggő szeletet ad. Az alábbi, Dubins és Spanier által kitalált „mozgó késes” eljárás olyan igazságos megoldást talál, ahol mindeki egyetlen szeletet kap. A mértékekről azt a kicsit erősebb tulajdonságot tesszük fel, hogy egy szelet mértéke folytonos a két vágás helyében.

Vágjuk be egy helyen a pizzát a közepéig, és kezdjük lassan körbe mozgatni a kést. Amelyik játékosnak a kés aktuális állásánál lévő szelet $\mu_i(P)/n$ mértékű lenne, szól (ha többen szólnak egyszerre, véletlenül választunk közülük). A jelzést adó játékosnak levágjuk a kés aktuális állásánál a szeletet, és a maradék pizzára folytatjuk a késmozgatást eggyel kevesebb játékossal.

4.2. állítás. *A mozgó késes eljárás igazságos.*

Bizonyítás. Aki először szól, legalább $\mu_i(P)/n$ mértékű szeletet kap. Mivel a többi játékos nem szólt korábban, nekik a maradék pizza mértéke legalább $(n-1)\mu_i(P)/n$. Ennek a következő játékos legalább $1/(n-1)$ részét kapja, stb. □

Az eljárás átfogalmazható egy véges sok lépésből álló eljárássá a következőképpen. A mozgó kés helyett minden játékos bejelöli a pizzán, hogy ő hol állítaná meg a kést. A legelső jelet rakó játékos kapja meg a jelnél levágott szeletet.

A lépések száma csökkenthető Even és Paz rekurzív módszerével. Ha n páratlan, ugyanazt csináljuk, mint előbb. Ha n páros, minden játékos oda rak egy jelet, ahol $\mu_i(P)/2$ értékű lenne a levágott rész; a pizzát pedig úgy vágjuk ketté, hogy a vágás előtt és után ugyanannyi jel legyen. Mindkét szeleten meghívjuk rekurzívan az eljárást azokkal a játékosokkal, akiknek a jele arra a szeletre esik (a pontosan a vágást jelötő játékosokat úgy osztjuk el, hogy ugyanannyi játékos jusson a két szeletre). Ezzel az eljárással $O(n^2)$ jelölés helyett elég összesen $O(n \log n)$ jelölés.

Irigységmentes felosztás

Az igazságosságnál erősebb tulajdonság az **irigységmentesség**: senki se járna jobban egy másik játékosnak jutó résszel. Vegyük észre, hogy egy irigységmentes mechanizmus automatikusan igazságos, hiszen $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$ minden j-re, tehát $\mu_i(A_i) \geq \mu_i(P)/n$. Két játékos esetén a fenti mechanizmusok ilyenek: az első játékosnak ugyanolyan jó a két szelet, míg a második a számára jobbat választja. Három játékos esetén viszont már nem garantált az irigységmentesség. Az alábbiakban Simmons és Su munkája nyomán megmutatjuk, hogy mindig van irigységmentes felosztás, ami ráadásul összefüggő szeletekből áll. Most a következő két feltevést tesszük a preferenciákról:

(i) egy szelet mértéke folytonos a két vágás helyében;

(ii) mindenki éhes, azaz egy valódi pizzaszelet mindenkinek jobb, mint a semmi.

A bizonyításhoz fehasználjuk a következő lemmát.

4.3. lemma. *Tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$ $(n-1)$-dimenziós szimplexet. Tetszőleges ϵ esetén meg tudjuk adni S-nek egy háromszögelését és a háromszögelés csúcsainak egy n színnel színezését úgy, hogy*

a) a háromszögelésben szereplő szimplexek átmérője legfeljebb ϵ,

b) a háromszögelésben szereplő szimplexek csúcsai különböző színűek.

Bizonyítás. Az úgynevezett iterált súlyponti felosztást használjuk. Kiindulásként S csúcsait színezzük ki n színnel, legyen ez az első $\mathcal{H}_1$ háromszögelés és $\mathcal{C}_1$ színezés. Az általános lépésben adott egy $\mathcal{H}_i$ háromszögelés és $\mathcal{C}_i$ színezés, ami teljesíti a b) tulajdonságot. Mindegyik szimplex minden oldalának (önmagának is) vegyük a súlypontját csúcsként, és ezeket összekötve osszuk fel n darab szimplexre; ez $\mathcal{H}_{i+1}$. Így minden új szimplexnek minden $j \in [n]$-re egyetlen olyan csúcsa lesz, ami egy $\mathcal{H}_i$-beli $j-1$ dimenziós szimplex súlypontja. A $\mathcal{C}_{i+1}$ színezést úgy kapjuk, hogy a $\mathcal{H}_i$-beli $j-1$ dimenziós szimplexek súlypontjait j színűre színezzük (speciálisan a $\mathcal{H}_i$-beli csúcsok mind az első színt kapják).

Elég nagy i-re az a) tulajdonság is teljesülni fog. □

4.4. tétel (Simmons, Su)**.** *Ha az (i) és (ii) tulajdonságok teljesülnek, akkor n vágással kaphatunk egy irigységmentes felosztást.*

Bizonyítás. Először a tétel egy közelítő változatát látjuk be, ebből határértékként fog következni a tétel állítása. Adott ϵ-ra vegyük a fenti S szimplexnek egy $\mathcal{H}$ háromszögelését és $\mathcal{C}$ színezését, ami teljesíti a lemma tulajdonságait. Vágjuk be egy tetszőleges helyen a pizzát a közepéig; ezután egy n szeletre vágás jellemezhető egy $x_1, \ldots, x_n$ vektorral, ahol $x_j \geq 0$ és $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ (x_j a sorrendben j-edik szelet nagysága). Tehát S elemei és a szeletelések között van egy bijekció, speciálisan $\mathcal{H}$ minden csúcsa megfelel egy szeletelésnek. Definiálunk $\mathcal{H}$ csúcsain egy $\mathcal{C}'$ színezést a következőképp: tegyük fel hogy a csúcs színe $\mathcal{C}$ szerint i; legyen a $\mathcal{C}'$ szerinti színe j, ha az i-edik játékos a csúcsnak megfelelő szeletelésben a j-edik szeletet preferálja (ha több szelet is a kedvence, akkor bármelyiket választhatjuk).

A (ii) tulajdonság miatt a $\mathcal{C}'$ színezés kielégíti a Sperner Lemma (2.34. Lemma) feltételeit, tehát van a $\mathcal{H}$ háromszögelésben egy tarka S' szimplex. Az i-edik játékoshoz rendeljük azt a szeletet, amit S' $\mathcal{C}$ szerint i színű csúcsánál a $\mathcal{C}'$ színének megfelelő szelet. Mivel S' csúcsai $\mathcal{C}'$ szerint különböző színűek, az a) tulajdonság miatt a különböző játékosokhoz rendelt szeletek közti átfedés legfeljebb ϵ.

A tételt bizonyításához vegyünk egy $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ 0-hoz tartó sorozatot, és legyen S_i az ϵ_i-re a kiválasztott szimplex. Az S_i sorozatból ki lehet választani egy olyan részsorozatot, ahol egyrészt a szimplexek súlypontjaiból álló sorozat konvergens, másrészt mindegyik játékos a sorozat minden elemében ugyanolyan sorszámú szeletet kap. Az (i) tulajdonság miatt a súlypontok határértékének megfelelő felosztás jó lesz. $\square$

A fenti tétel nem ad véges lépésszámú algoritmust a felosztás megtalálására. Még az összefüggőség megkövetelése nélkül is sokáig nyitott kérdés volt, hogy van-e egyáltalán olyan algoritmus, ami bármilyen preferenciák esetén véges. 3 játékos esetén Selfridge és Conway adott 1960-ban ilyen algoritmust:

1. Az első játékos a saját preferenciája szerint 3 egyenlő részre osztja a pizzát.
2. A második játékos a számára legjobb szeletből levág annyit, hogy számára egyenlő legyen a második legjobbal. Legyen L a levágott rész, és P_1, P_2, P_3 a három szelet, ahol P_1-ből vágtunk le.
3. A harmadik játékos választ egyet P_1, P_2, P_3 közül. Ha nem P_1-et választotta, akkor a második játékos megkapja P_1-et. Ha P_1-et választotta, akkor a második játékos választ a maradék kettőből. A harmadik szelet az első játékosé.
4. A második és harmadik játékos közül az, aki nem P_1-et kapta, a saját preferenciái szerint 3 egyenlő részre osztja L-et. Ebből választ először a P_1-et kapó játékos, utána az első játékos, végül az osztó.

4.5. tétel (Selfridge, Conway)**.** *A fenti algoritmus irigységmentes.*

Bizonyítás. Nézzük először a P_1, P_2, P_3 szeleteket. A harmadik játékos szabadon választott ezek közül; a második játékos a két, számára egyformán legjobb közül az egyiket kapja; végül az első játékosnak a levágás előtt ugyanannyit értek, és nem a levágottat kapja. Így elmondhatjuk, hogy a P_1, P_2, P_3 szeleteket nem irigylik egymástól.

Legyen A az a játékos, aki L-et elosztotta, B pedig aki P_1-et kapta. A számára L részei egyformán jók, úgyhogy ő nem irigy, B pedig először választott a három közül. Az első játékos A előtt választ, tehát az ő szeletére nem irigy. B pedig P_1-et kapta, amit az első játékos még L-lel együtt sem szeret jobban, mint a saját csonkítatlan szeletét, tehát B-re se irigykedik. $\square$

Tetszőleges játékosszámra Brams és Taylor adott először véges irigységmentes algoritmust 1992-ben. Ennek az algoritmusnak azonban fix játékosszám esetén nincs egy globális lépésszám korlátja, azaz a preferenciák változtatásával akármilyen nagy lépésszámot elérhetünk. Globális lépésszám-korlátú algoritmus csak 5 játékos esetén ismert, nagyobb játékosszámra a kérdés nyitott.

Lakbér-elosztás

A fenti gondolatmenethez hasonlóan bizonyítható irigységmentes lakbér-felosztás létezése. Ebben a feladatban n diák szeretne kibérelni egy n-szobás egy lakást. A havi lakbér α, ezt szeretnék igazságosan elosztani egymás közt. Egy lakbér-elosztás jellemezhető egy $x_1, \ldots, x_n$ vektorral, ahol $x_j \geq 0$ és $\sum_{j=1}^n x_j = \alpha$ (x_j a j-edik szoba ára). Tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n x_j = \alpha\}$ $(n-1)$-dimenziós szimplexet. Tehát S elemei és a lakbér-elosztások között van egy bijekció. Az i-edik játékosnak van egy $\phi_i : S \to 2^n$ leképezése, ami megmondja, hogy adott lakbér-elosztásnál melyik szobá(ka)t választaná. Erről a következőket tesszük fel:

- $\phi_i(x)$ sosem üres,
- Ingyen szoba mindig jobb mint ami pénzbe kerül, azaz ha van j, hogy $x_j = 0$, akkor $\phi_i(x)$-ben csak ilyen szobák vannak,
- ϕ_i folytonos abban az értelemben, hogy ha az x^j sorozat tart x-hez, és $k \in \phi_i(x^j)$ minden j-re, akkor $k \in \phi_i(x)$.

Egy x lakbér-elosztás *irigység-mentes*, ha van olyan π permutáció, hogy $\pi(i) \in \phi_i(x)$ $(i \in [n])$, azaz ha az i-edik játékos a $\pi(i)$ szobát kapja, akkor senki se akar másik szobára váltani.

4.6. tétel (Su)**.** *A fenti feltételek mellett létezik irigységmentes lakbér-elosztás.*

A bizonyítás lényegében a 4.4. Tételét követi, de itt a Sperner-lemma helyett egy hasonló, de más tulajdonságú színezésekre vonatkozó lemmát kell használni; ez hasonlóan bizonyítható mint a 2.34. Lemma.

4.7. lemma. *Tegyük fel, hogy az S szimplexnek adott egy olyan szimpliciális felosztása, ahol S minden lapjának van belső pontja a felosztásban. Legyen $\mathcal{C}'$ a felosztás csúcsainak olyan színezése, ahol a belső csúcsok akármelyik színt kaphatják, a határon pedig egy csúcs akkor kaphatja az i-edik színt, ha rajta van az i-edik lapon. Ekkor van tarka szimplex a felosztásban.*

A tétel bizonyításához azt kell észrevenni, hogy a a 4.4. Tétel bizonyításához hasonlóan definiált $\mathcal{C}'$ színezés teljesíti a lemma feltételeit.

Stratégia-biztosság

Az eddig tárgyalt igazságos felosztási mechanizmusok nem stratégia-biztosak: egy játékos bizonyos esetekben jobb szeletet kaphat, ha hazudik a preferenciáiról. Be lehet látni, hogy determinisztikus stratégia-biztos mechanizmus nem lézezik, már két játékos esetén sem. Azonban két játékos esetén olyan randomizált mechanizmust tudunk mondani, ami garantáltan irigységmentes, és várható értékben stratégia-biztos.

Feltesszük, hogy $P = [0,1]$, és μ_1 és μ_2 abszolút folytonos valószínűségi mértékek P-n.

4.8. lemma. *Létezik nemnegatív x^* és y^*, hogy $\mu_1([x^*, y^*]) = 1/2$ és $\mu_2([x^*, y^*]) = 1/2$.*

Bizonyítás. A kétdimenziós Kakutani fixpont-tételt (2.36. Tétel) használjuk. Legyen $z_1 = \max\{z \in \mathbb{R}_+ : \mu_1[0, z] = 1/2\}$ és $z_2 = \max\{z \in \mathbb{R}_+ : \mu_2[0, z] = 1/2\}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $z_1 \geq z_2$. Legyen $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq z_1,\ z_2 \leq y \leq 1\}$, és definiálunk egy $\varphi : C \to 2^C$ halmazértékű függvényt, ahol $\varphi(x, y) = \varphi_1(y) \times \varphi_2(x)$, és utóbbiaknak a következő a definíciója:

$$\varphi_1(y) = \{x \in [0, z_1] : x \leq y,\ \mu_2([x, y] = 1/2\},$$
$$\varphi_2(x) = \{y \in [z_2,1] : y \geq x,\ \mu_1([x, y] = 1/2\}.$$

Könnyű látni, hogy φ_1 és φ_2 rendelkezik a zárt gráf tulajdonsággal, és minden pont képe nemüres intervallum. Ezért φ is rendelkezik a zárt gráf tulajdonsággal, és minden pont képe konvex (egy téglalap). Alkalmazható tehát a Kakutani fixpont tétel: létezik x^* és y^*, hogy $(x^*, y^*) \in \varphi(x^*, y^*)$, vagyis $x^* \in \varphi_1(y^*)$ és $y^* \in \varphi_2(x^*)$. A függvények definíciója szerint ez azt jelenti, hogy $\mu_1([x^*, y^*]) = 1/2$ és $\mu_2([x^*, y^*]) = 1/2$. □

A lemma alapján a következő egy várható értékben stratégia-biztos mechanizmus: megkeressük a lemmában szereplő x^*, y^* értékeket, és az egyik játékos kapja az $[x^*, y^*]$ szeletet, a másik pedig a $[0, x^*] \cup [y^*,1]$ szeletet, de azt véletlenszerűen döntjük el, hogy melyik játékos melyiket.

A lemmában szereplő (x^*, y^*) pár véges sok lépésben csak bizonyos további feltételek teljesülése esetén számolható ki pontosan, de konvergálni tudunk hozzá: kiszámolhatunk egy $1 = y_0, x_1, y_1, x_2, y_2 \dots$ alternáló sorozatot a következőképp: ha y_i megvan, legyen $I = \varphi_2(y_i)$. Ha valamely $x \in I$-re $y_i \in \varphi_1(x)$, akkor $x^* = x$, $y^* = y_i$ jó pár. Ellenkező esetben legyen x_{i+1} az I maximális eleme, és legyen $J = \varphi_1(x_{i+1})$. Ha valamely $y \in J$-re $x_{i+1} \in \varphi_2(y)$, akkor $x^* = x_{i+1}$, $y^* = y$ jó pár. Ellenkező esetben legyen y_{i+1} a J maximális eleme.

Be lehet látni, hogy az $x_1, x_2, x_3 \dots$ sorozat és az $y_0, y_1, y_2, \dots$ sorozat is szigorúan monoton csökkenő, és ha x^*-hoz illetve y^*-hoz konvergálnak, akkor $(x^*, y^*) \in \varphi(x^*, y^*)$.

4.2. Szavazási mechanizmusok

Amennyiben két lehetséges alternatíva közül kell választani, kézenfekvő döntési mechanizmus a **többségi szavazás**. Látható ráadásul, hogy ez az egyedüli igazán igazságosnak tekinthető módszer. Kérdés, hogy mi a helyzet, ha három lehetséges kimenetel közül kell dönteni? A többségi szavazás természetes általánosítása a listás szavazás: a lehetséges jelöltek közül mindenki egyet választhat, és a legtöbb szavazatot kapó jelölt nyeri a választást.

Tekintsük a következő szituációt. Három jelölt, a, b és c közül a szavazók 45%-ának preferenciasorrendje a, b, c, 30% preferenciasorrendje b, c, a, 25%-nak pedig c, b, a. A többségi szavazás alapján ekkor a fog nyerni a szavazatok 45%-ával. Vegyük azonban észre, hogy a szavazók 55%-a számára a valójában a három közül a legrosszabb választás: a többség tehát jobban örülne, ha b vagy c nyerne. Ha például a 25%-os csoport a saját kedvenc jelöltje, c helyett átszavazna b-re, akkor őt ki is tudnák hozni győztesnek. Ezt a jelenséget nevezzük **taktikai manipulálhatóságnak**. A probléma ezzel, hogy a szavazók valódi véleménye helyett „azt gondolom, hogy a többiek úgy gondolják, hogy én azt gondolom hogy ők azt gondolják stb." típusú kezelhetetlen okoskodások eredményét kapjuk, amit például a közvéleménykutatások eredménye igen erősen torzíthat. (Hasonló jelenség, ha valaki azért nem szavaz a számára legszimpatikusabb pártra, mert fél hogy az nem éri el az 5 százalékos parlamenti küszöböt, és ezért az ő szavazata „kárba veszne".)

A többségi szavazás javítását célozza a Borda-pontozás: legyen k jelöltünk. Minden szavazó sorrendbe állítja a jelölteket, az első helyezett k, a második $k-1$, a legutolsó pedig 1 pontot kap. A fenti preferenciák mellett, 100 szavazó esetén a 190, b 230, c pedig 180 pontot kapna, vagyis b jönne ki győztesnek.

4.9. feladat. Készítsünk Borda-pontozás esetében példát taktikai manipulálhatóságra, vagyis mutassunk olyan esetet, amikor bizonyos szavazók a saját valós preferenciasorrendjeiktől eltérő módon szavazva maguk számára kedvezőbb eredményt tudnának kikényszeríteni.

Itt és a következőkben $\prec$-t rendezésnek nevezzük egy A halmazon, ha **dichotóm** (vagyis minden $x, y \in A$-ra vagy $x \prec y$ és $y \prec x$ közül pontosan az egyik áll fenn), **irreflexív** (vagyis $x \prec x$ nem teljesül) és **tranzitív** (vagyis $x \prec y$ és $y \prec z$ esetén $x \prec z$). Feltesszük, hogy minden szavazó preferenciáit egy-egy rendezés adja meg a jelöltek halmazán.

A többségi szavazat egy másik, preferenciákra vonatkozó általánosítása az alábbi lenne. Minden szavazó megadja a saját preferenciasorrendjét. Az $x, y \in A$ jelöltek sorrendjét a közös döntésben aszerint határozzuk meg, hogy melyiküket részesítette a szavazók többsége előnyben a másikkal szemben. Condorcet márki 1785-ben adott példája rámutat arra, hogy ez a módszer nem működhet. Tegyük fel ugyanis, hogy három jelölt van: $A = \{a, b, c\}$. Legyen a szavazók száma is három, a következő preferenciákkal:

(i) $a \succ_1 b \succ_1 c$,

(i) $b \succ_2 c \succ_2 a$,

(i) $c \succ_3 a \succ_3 b$,

ahol $\prec_i$ az i. szavazó rendezése A-n. Többségi szavazást alkalmazva, a-t előbbre kell rangsoroljuk b-nél, hiszen a háromból ketten előbbre helyezték. Ugyanígy viszont b-t előbb kell tennünk c-nél, c-t pedig a-nál, tehát végül az $a \prec b \prec c \prec a$ ellentmondásos sorrendhez jutnánk.

A többségi szavazáson és a Borda-pontozáson kívül számos más választási rendszer is elképzelhető, mint pl. a kétfordulós választás, ahol a második fordulóba az első fordulóban legtöbb szavazatot elérő két jelölt jut tovább. Ennél a módszernél is kimutatható azonban a taktikai manipulálhatóság. A fejezet fő eredménye az lesz, hogy ez a jelenség általában véve kiküszöbölhetetlen.

Az Arrow-tétel

Megadunk egy formális modellt. Legyen A az alternatívák halmaza, és legyen L az A-n megadható összes lehetséges rendezés. Adott n szavazó, az i. szavazó preferenciáit az $\prec_i \in L$ rendezés írja le: $a \succ_i b$ hogyha előbbre rangsorolja a-t b-nél. Az $F : L^n \to L$ függvényt **aggregációs szabálynak** nevezzük:

ez az n szavazó sorrendjéből alakít ki egy közös sorrendet. Az $f : L^n \to A$ függvény pedig **választási szabály**, ez a sorrendek alapján egyetlen jelöltet választ ki.

Az n szavazó által adott sorrendekből álló $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$-t egy **választási profilnak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $a, b \in A$ lehetőségeket a π és $\pi' = (\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ profilok **azonosan rendezik**, ha minden i-re $a \prec_i b \Leftrightarrow a \prec'_i b$.

Az F aggregációs szabállyal kapcsolatban természetes elvárásnak tekinthetőek az alábbi tulajdonságok.

(E) F **egyhangú**, ha tetszőleges $\prec\ \in L$-re $F(\prec, \prec, \dots, \prec) = \prec$. Vagyis ha mindenki ugyanazt a sorrendet választja, akkor ez legyen a konszenzus is.

(L) F **független a lényegtelen alternatíváktól**, ha tetszőleges $a, b \in A$ alternatíva közös sorrendje csak attól függ, hogy az egyes szavazóknál mi volt a és b sorrendje. Azaz ha a π és π' profilok azonosan rendezik a-t és b-t, akkor $a \prec b \Leftrightarrow a \prec' b$, ahol $\prec\ = F(\pi)$ és $\prec'\ = F(\pi')$.

(D) Az i. szavazót **diktátornak** nevezzük F-re nézve, ha mindig az ő sorrendje lesz a közös döntés, vagyis tetszőleges $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ sorrendekre $F(\pi) = \prec_i$. Ha van ilyen i, akkor F-et **diktatúrának** nevezzük, egyébként pedig **diktátor-mentesnek**.

Ha összesen két alternatíva van, akkor könnyen látható hogy a többségi szavazásra mindegyik feltétel teljesül. Arrow klasszikus lehetetlenségi eredménye azonban kimondja, hogy több alternatíva esetén nem lehet őket egyszerre kielégíteni.

4.10. tétel (Arrow, 1951)**.** *Legalább három választási lehetőség ($|A| \geq 3$) esetén ha egy aggregációs szabály egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól, akkor diktatúra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F egyhangú és független a lényegtelen alternatíváktól, vagyis rendelkezik az (E) és (L) tulajdonságokkal. Vegyük észre, hogy ezekből egyből következik az alábbi

(E') Ha valamely $a, b \in A$-ra $a \succ_i b$ minden i-re és $\prec\ = F(\prec_1, \prec_2, \dots, \prec_n)$, akkor $a \succ b$.

4.11. állítás. *Ha valamely b alternatíva $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$-re minden $\prec_i$ sorrendben vagy a legelső vagy a legutolsó, akkor a $\prec\ = F(\pi)$ sorrendet tekintve is vagy a legelső, vagy a legutolsó.*

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy $a \succ b \succ c$ valamely $a, c \in A$-ra. Legyen π' az a választási profil, amit úgy kapunk π-ből, hogy mindegyik sorrendben a-t közvetlenül c mögé helyezzük. Mivel minden $\prec_i$-re b a legelső vagy legutolsó, ezért π és π' azonosan rendezi a-t és b-t, illetve b-t és c-t. Ezért (L) alapján $a \succ' b$ és $b \succ' c$. Ugyanakkor $c \succ' a$ is teljesül (E') miatt, ellentmondás. $\diamond$

Vegyünk most egy tetszőleges π profilt és egy $b \in A$ jelöltet. Ebből hozzuk létre a π^j, $j = 0, \dots, n$ profilokat az alábbi módon. π^j-ben $i \leq j$ esetén b-t $\prec_i$-ben a legelső helyre hozzuk előre, $i > j$ esetén pedig a legutolsóra. (E') miatt az $F(\pi^0)$ sorrendben b a legutolsó, $F(\pi^n)$-ben pedig a legelső lesz. Az előző állítás miatt b minden $F(\pi^j)$-ben vagy első, vagy utolsó. Legyen ℓ a legkisebb olyan index, amire b a legelső $F(\pi^\ell)$-ban. Vagyis amikor az ℓ. szavazó az utolsó helyről az elsőre viszi előre b-t, akkor a közös döntésben is ugyanez játszódik le. Belátjuk, hogy ő diktátor.

4.12. állítás. *Tetszőleges $\pi' = (\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ profilra és $a, c \neq b$-re az $F(\pi')$ közös döntésben a és c sorrendje ugyanaz, mint $\prec'_\ell$-ben.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \succ'_\ell c$. Módosítsuk π'-t π''-re úgy, hogy $i < \ell$-re b-t a legelső, $i > \ell$-re a legutolsó helyre tesszük $\prec'_i$-ben, $\prec'_\ell$-ben pedig helyezzük b-t közvetlenül a mögé (vagyis $a \succ''_\ell b \succ''_\ell c$). Legyen $\prec''\ = F(\pi'')$. Vegyük észre, hogy a és b ugyanúgy van rendezve π''-ben mint $\pi^{\ell-1}$-ben, ezért (L) miatt $a \succ'' b$, mivel b a legutolsó volt $F(\pi^{\ell-1})$-ben. Hasonlóan, b és c ugyanúgy van rendezve π''-ben mint π^ℓ-ben, ezért $b \succ'' c$. A tranzitivitás miatt $a \succ'' c$. Mivel a és c ugyanúgy van rendezve π'-ben és π''-ben, ezért ismét (L) miatt $a \succ' c$. $\diamond$

4.13. állítás. *Tetszőleges $\pi' = (\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ profilra és $a \neq b$-re a közös döntésben a és b sorrendje ugyanaz, mint $\prec'_\ell$-ben.*

Bizonyítás. Válasszunk egy tetszőleges $d \neq a, b$-t. Ugyanazzal a konstrukcióval (b helyett d-vel) meghatározhatunk egy $\hat{\ell}$ indexet, amire igaz az, hogy minden π'-re a és b sorrendje $F(\pi')$-ben ugyanaz, mint $\prec'_{\hat{\ell}}$-nél. Azt kell csupán belátnunk, hogy $\hat{\ell} = \ell$. Tegyük fel, hogy $\hat{\ell} \neq \ell$, és tekintsük a $\pi^{\ell-1}$ és π^{ℓ} sorrendeket. Ezekben a és b sorrendje a $\hat{\ell}$. választónál ugyanaz, $F(\pi^{\ell-1})$-ben és $F(\pi^{\ell})$-ben viszont különböző, ami ellentmondás. ◇

Beláttuk tehát, hogy az ℓ. választó diktátor. Világos az is, hogy nem lehet két különböző diktátor. □

A Gibbard-Satterthwaite tétel

Eddig aggregációs szabályokat vizsgáltunk; most hasonló lehetetlenségi eredményt mutatunk választási szabályokra is. Legyen f egy választási szabály. Azt mondjuk, hogy f **taktikailag manipulálható**, ha van olyan $1 \leq i \leq n$, $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profil és $\prec'_i \in L$ rendezés, hogy $\pi' = (\prec_1, \dots, \prec'_i, \dots \prec_n)$-re $a \prec_i a'$, ahol $a = f(\pi)$ és $a' = f(\pi')$. Ez azt jelenti, hogy az i. szavazó a győztes a-val szemben előnyben részesíti az a'-t, és el tudja érni a' megválasztását úgy, hogy a (valós) $\prec_i$ preferenciái helyett egy másik $\prec'_i$-t közöl. Azt mondjuk, hogy f **taktikázásbiztos**, ha nem manipulálható taktikailag.

Egy hasonló – valójában azonos – fogalom: az f választási szabály **monoton**, ha – az előző definíció jelöléseit használva – $a \neq a'$-ből következik hogy $a' \prec_i a$ és $a \prec'_i a'$. Vagyis ha az i. szavazó szavazatával módosítani tudja a-ról a'-re a győztest, akkor ehhez saját sorrendjében az a' és a közti rendezésnek meg kell fordulnia.

4.14. állítás. *Az f választási szabály pontosan akkor monoton, ha taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha monoton, akkor taktikázásbiztos. Megfordítva, tegyük fel, hogy nem monoton; belátjuk, hogy manipulálható. Ha nem monoton, akkor $a = f(\pi)$ és $a' = f(\pi')$, $a \neq a'$ esetén vagy $a' \succ_i a$ vagy $a \succ'_i a'$. Az első esetben manipulálható az eredeti jelölésekkel. A második esetben fordítva, az i. választó úgy tud manipulálni, ha $\succ'_i$-ről változtatja $\succ_i$-re a szavazatát. □

Egy f választási szabálynál az i. szavazót **diktátornak** nevezzük, ha tetszőleges $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profil esetén $f(\pi)$ az i. sorrend szerinti legelső jelölt lesz. f **diktatúra**, ha van diktátor.

4.15. tétel (Gibbard 1973, Satterthwaite 1975)**.** *Ha f taktikázásbiztos szürjektív választási szabály és $|A| \geq 3$, akkor f diktatúra.*

Ha $|A| = 2$, akkor a többségi szavazás taktikázásbiztos. Szintén szükséges feltétel, hogy f szürjektív (vagyis mindegyik alternatíva szerepel a lehetséges győztesek közt): az is taktikázásbiztos ugyanis, hogy egy rögzített $a \in A$-ra $f(\pi) = a$ minden π esetén. A tételt a 4.10. tételre fogjuk visszavezetni.

Bevezetünk egy új jelölést: egy $S \subset A$ halmazra és $\prec \in L$ rendezésre legyen $\prec^S$ az a rendezés, hogy S elemeit előre hozzuk. Vagyis $a, b \in S$ illetve $a, b \notin S$ esetekben $a \prec^S b \Leftrightarrow a \prec b$, ha pedig $a \in S$, $b \notin S$, akkor $a \succ^S b$. Egy $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profilra legyen $\pi^S = (\prec_1^S, \dots, \prec_n^S)$.

Az f választási szabály segítségével definiálunk egy F aggregációs szabályt. A π választási profilra $F(\pi) = \prec$-et a következő módon definiáljuk: $a \prec b$ pontosan akkor, ha $f(\pi^{\{a,b\}}) = b$.

A 4.15. tétel bizonyítása az alábbi két lemmából következik:

4.16. lemma. *Ha f taktikázásbiztos szürjektív választási szabály, akkor F egy aggregációs szabály.*

Bizonyítás. Szükségünk lesz az alábbi állításra.

4.17. állítás. *Tetszőleges $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ választási profilra $f(\pi^S) \in S$.*

Bizonyítás. Legyen $a \in S$ tetszőleges. Mivel f szürjektív, ezért létezik olyan $\pi' = (\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ választási profil, amelyre $f(\pi') = a$. Cseréljük ki első lépésben $\prec'_1$-et $\prec_1^S$-re, utána $\prec'_2$-t $\prec_2^S$-re, stb. Azt állítjuk, hogy mindegyik lépésben $f(\pi') \in S$, amiből következik az állítás, hiszen végül π^S-hez jutunk.

Indirekten tegyük fel, hogy amikor $\prec'_i$-t $\prec_i^S$-re változtatjuk, akkor $f(\pi') = b \notin S$-re változik, és i a legkisebb ilyen index. Ez azonban ellentmond a monotonicitásnak, hiszen $b \prec_i^S a$. ◇

Azt kell belátnunk, hogy minden $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$-re az f-ből definiált $\prec\, = F(\pi)$ egy rendezést ad, vagyis dichotóm és tranzitív. Az dichotómia következik abból, hogy $f(\pi^{\{a,b\}}) \in \{a,b\}$. A tranzitivitáshoz tegyük fel indirekten, hogy $a \prec b \prec c \prec a$; legyen $S = \{a,b,c\}$. Mivel $f(\pi^S) \in S$, a szimmetria miatt feltehetjük hogy $f(\pi^S) = a$. Azt állítjuk, hogy ekkor $a \succ b$, ami ellentmondást ad. Valóban, a π^S választási profil elemeit egyenként cseréljük le $\pi^{\{a,b\}}$ elemeire. A montonicitásból ismét következik, hogy minden egyes csere után f értéke a marad. □

4.18. lemma. *Ha f diktátormentes taktikázásbiztos szürjektív választási szabály, akkor F egyhangú, a lényegtelen alternatíváktól független és diktátormentes aggregációs szabály.*

Bizonyítás. Az egyhangúsághoz legyen $\pi = (\prec, \dots, \prec)$. Tegyük fel, hogy $a \prec b$; azt kell belátni, hogy $f(\pi^{\{a,b\}}) = b$. Ez következik abból, hogy $\pi^{\{a,b\}} = (\pi^{\{a,b\}})^{\{b\}}$, és a 4.17. állítás alapján $f(\pi^{\{a,b\}})^{\{b\}} = b$.

(L)-hez legyen $a, b \in A$, $\pi = (\prec_1, \dots, \prec_n)$ és $\pi' = (\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ olyan, hogy $a \prec_i b \Leftrightarrow a \prec'_i b$. Azt kell igazolni, hogy $f(\pi^{\{a,b\}}) = f(\pi'^{\{a,b\}})$. Ismét egyenként változtassuk meg a $\prec_i^{\{a,b\}}$ preferenciákat $\prec_i'^{\{a,b\}}$-re, és használjuk a monotonicitást.

Végül, ha az i. szavazó diktátor lenne F-re nézve, akkor könnyen láthatóan f-re nézve is az volna. □

Ezzel a 4.15. tétel bizonyítása befejeződött, hiszan a 4.10. tétel éppen azt mondja ki, hogy $|A| \geq 3$ esetén nem létezhet ilyen aggregációs szabály.

Többségi osztályozás

A fenti lehetetlenségi tételek olyan modellben érvényesek, ahol minden szavazó egy preferencia-sorrendet ad meg. Elképzelhető azonban olyan választási rendszer is, ahol a szavazók „osztályozzák”, azaz valamilyen módon kategóriákba sorolják a jelölteket. Balinski és Laraki javasolta a következő, **többségi osztályozás** (majority judgement) elnevezésű módszert. Az alternatívák halmazát továbbra is A jelöli; legyen $|A| = m$. Adott ezen kívül a lehetséges osztályzatok egy $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ halmaza, ahol r_1 a legrosszabb és r_k a legjobb osztályzat. Például vehetjük az $R = \{$elégtelen, elégséges, közepes, jó, jeles$\}$ halmazt. Fontos, hogy az R halmazban lévő osztályzatok nem feltétlenül számok, tehát bár R rendezett halmaz, az osztályzatok közti különbség nem feltétlenül számszerűsíthető.

Egy szavazó minden jelöltnek ad egy osztályzatot, azaz szavazata egy R^m-beli vektor. **Szavazási profil** alatt most egy $M \in R^{m \times n}$ mátrixot értünk, aminek a j-edik oszlopa a j-edik szavazó szavazata. Az **aggregációs szabály** most egy $F : R^{m \times n} \to L$ függvény.

Egy $a \in A$ alternatívának az M szavazási profilhoz tartozó **osztályzat-profilja** az az $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vektor, amit úgy kapunk, hogy az M mátrix a-hoz tartozó sorában lévő osztályzatokat sorbarendezzük a legrosszabbtól a legjobbig. Pl. ha az M mátrix a-hoz tartozó sora (közepes, jeles, elégséges, jeles, közepes), akkor a-nak az osztályzat-profilja (elégséges, közepes, közepes, jeles, jeles).

Adott $1 \leq i \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor$-re azt mondjuk, hogy az a alternatíva $(n-i+1)/n$-**intervalluma** az $[\alpha_i, \alpha_{n-i+1}]$ intervallum. Szemléletesen arról van szó, hogy a szavazók $(n-i+1)/n$ része α_i-nél nem rosszabb osztályzatot adott, és szintén $(n-i+1)/n$ részük α_{n-i+1}-nél nem jobbat. A fenti példában, ha az osztályzat-profil (elégséges, közepes, közepes, jeles, jeles), akkor a következő intervallumokat kapjuk:

– 1-intervallum: [elégséges, jeles];

– 4/5-intervallum: [közepes, jeles];

– 3/5-intervallum: [közepes, közepes].

A Balinski és Laraki féle aggregációs szabály megadásához először megmutatjuk, hogyan hasonlítsunk össze két alternatívát. Legyen a és b a két alternatíva. Tekintsük a legnagyobb i számot, amire a-nak az $(n-i+1)/n$-intervalluma nem egyezik meg b $(n-i+1)/n$-intervallumával (ha mind megegyezik, akkor pontosan ugyanolyan osztályzatokat kaptak). Jelölje a-nak az $(n-i+1)/n$-intervallumát $[r_s, r_t]$, b-nek az $(n-i+1)/n$-intervallumát pedig $[r_{s'}, r_{t'}]$. Tudjuk, hogy $s \leq t$ és $s' \leq t'$. Akkor mondjuk, hogy a jobb mint b, azaz $a \succ b$, ha a következő két lehetőség valamelyike teljesül:

1. $s > s'$,
2. $s = s'$ és $t > t'$.

Ha két alternatíva pontosan ugyanolyan osztályzatokat kap, akkor egy A-n előre kisorsolt sorrend szerint döntjük el, hogy melyiket tekintjük jobbnak. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így definiált $\prec_M$ reláció egy rendezés az alternatívákon, és így megad egy aggregációs szabályt: $F(M) = \prec_M$.

4.19. tétel (Balinski, Laraki). *A fent definiált F aggregációs szabály rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- ***Anonimitás***: *A szavazás eredménye nem változik, ha a szavazókat (azaz az M mátrix oszlopait) megcseréljük. (Vegyük észre, hogy ez erősebb, mint a diktátormentesség)*
- ***Semlegesség***: *Ha nincs két alternatíva, aminek ugyanaz az osztályzat-profilja, akkor a szavazás eredménye nem változik, ha az M mátrix sorait megcseréljük.*
- ***Függetlenség a lényegtelen alternatíváktól***: *két alternatíva egymáshoz viszonyított sorrendje csak az ő osztályzataiktól függ*
- ***Egyhangúság***: *Ha a és b alternatívák közül minden szavazó legalább olyan jó szavazatot ad a-nak mint b-nek, és valaki jobbat, akkor a szavazás eredményében $a \succ b$.*
- ***Monotonitás***: *Ha egy szavazó megváltoztatja a-ra adott osztályzatát egy jobb osztályzatra, akkor a nem kerülhet rosszabb helyre a szavazás eredményében.*

Bizonyítás. Mind könnyen látszik a definíciókból. □

A tétel mutatja, hogy ha a szavazók osztályozhatnak, akkor elkerülhetők az Arrow-tétel által fémjelzett problémák. Emögött az van, hogy az osztályozásra vonatkozó „Függetlenség a lényegtelen alternatíváktól” feltétel lényegesen gyengébb, mint a rendezésekre vonatkozó. Ugyanis míg osztályozásnál a két alternatíva osztályzatát fixáljuk, addig a rendezéseknél csak az egymáshoz viszonyított sorrend fix.

4.3. Pénzalapú mechanizmustervezés

Az előző fejezetben a játékosok (választók) a különböző alternatívák közt egy sorrendet állapíthattak meg. Ez azonban nem tudja kifejezni azt, hogy „mennyivel” részesítik inkább előnyben egyik vagy másik lehetőséget; vagy esetleg mindegy nekik, melyik valósul meg. Következő modellünkben nem sorrend fog szerepelni, hanem minden lehetőség megvalósulása valamilyen pénzben kifejezhető hasznot fog jelenteni. Kezdjük egy példával, amiben egy aukció lebonyolítása a feladat.

4.3.1. Vickrey-árverések

Egy értékes tárgyat szeretnénk elárverezni. n érdeklődő van, ezek közül pontosan az egyik kaphatja meg. Mindenki egyidejűleg, lezárt borítékban tehet árajánlatot, ezek alapján döntjük el, kinek és mennyiért adjuk oda. Az i. játékos számára a tárgy $\hat{v}_i \in \mathbb{R}$ forintot ér; ha ő kapja meg t forintért, akkor a haszna $\hat{v}_i - t$ (ami negatív is lehet); ha valaki más kapja, akkor nulla a haszna. A $\hat{v}_i$ értéket csak az i. játékos ismeri; tehát a játék nem is teljes információs. Vegyük észre, hogy ez a játék ráadásul nem is véges, hiszen $S_i = \mathbb{R}$ mindegyik játékosnál. Az i. játékos licitjét v_i-vel jelöljük.

Két árverési mechanizmust vizsgálunk; mindkettőben a legtöbbet ígérő játékos kapja meg a tárgyat. (Ha több ilyen van, akkor pl. az ABC-ben utolsó nyer.) A **legmagasabb áras** változatban annyit kell fizetnie, amennyit licitált; a **második áras** vagy más néven **Vickrey-**árverésben pedig a második legnagyobb licit értékét kell kifizetnie.

Minden játékos stratégiája a licit értékével jellemezhető, azaz $S_i = \mathbb{R}_+$ (vagy $\mathbb{Z}_+$, ha csak egész értéket lehet mondani). Világos, hogy egyik árverési mechanizmusban sem érdemes $\hat{v}_i$-nél magasabbat licitálni. A legmagasabb áras változatban érdemes lehet $\hat{v}_i$-nél kisebb számot mondani, hiszen ha mi nyerünk, akkor az a cél, hogy minél kevesebbel mondjunk többet, mint a második legjobb licit. Mivel azonban nem ismerjük a többi licitet, csak tippelgetni tudunk, és lehet, hogy véletlen alámegyünk a másodiknak, így mégsem mi nyerünk. A következő állítás azt mutatja, hogy a második áras változatban a valós $\hat{v}_i$ értéket érdemes licitálni, függetlenül a többiek értékeiről alkotott elképzeléseinktől.

4.20. állítás. *A második áras játékban $v_i = \hat{v}_i$ az i. játékos egyértelmű domináns stratégiája.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a többi játékos licitjei közül z a legnagyobb érték. Ha $z \geq \hat{v}_i$, akkor úgysem lett volna esélyünk hasznot elérni, hiszen van, akinek $\hat{v}_i$-nél többet ér a tárgy. Ha $\hat{v}_i > z$, akkor $\hat{v}_i$-t licitálva $\hat{v}_i - z$ nyereséget érünk el, ennél többet pedig semmilyen licittel nem tudunk. Összefoglalva: z értékétől függetlenül tetszőleges $v_i \neq \hat{v}_i$ esetén mindig legalább annyi lenne a nyereségünk $\hat{v}_i$-t licitálva, mint v_i-t, és van olyan szituáció, amikor kifejezetten jobban járnánk $\hat{v}_i$ licittel. Vagyis $\hat{v}_i$ valóban domináns stratégia. □

Az általános modellben adott alternatíváknak egy A halmaza, ami árveréseknél a tárgyak lehetséges szétosztásainak felel meg (de nincs benne az, hogy ki mennyit fizet). Az i. játékosnak adott egy $\hat{v}_i : A \to \mathbb{R}$ **értékelési függvénye**, ami azt fejezi ki, hogy az $a \in A$ lehetőség megvalósulása mennyi hasznot (vagy kárt) hoz az illetőnek. Megengedjük továbbá, hogy a mechanizmus valamennyi pénzt kérjen a játékosoktól (vagy adjon nekik). A játékos haszna az értékelési függvényének és a tőle beszedett pénznek a különbsége lesz. A fenti Vickrey-árverésnél az alternatívák A halmaza azonos a játékosok halmazával, mivel egy kimenetel annak felel meg, hogy ki kapja meg a tárgyat. Ha $a \neq i$, akkor $\hat{v}_i(a) = 0$, ha pedig $a = i$, akkor $\hat{v}_i(i)$ a tárgy tényleges értéke az i. játékos számára. Később olyan változatát is nézzük majd a Vickrey árverésnek, ahol az is egy lehetséges kimenetel, hogy senki sem kapja meg a tárgyat.

Legyen S_i az i. játékos lehetséges v_i értékelési függvényeinek halmaza (ez lehet az összes $A \to \mathbb{R}$ függvény, vagy ennek bármely olyan részhalmaza, ami tartalmazza $\hat{v}_i$-t), és legyen $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. **Mechanizmus** alatt egy $\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$ függvény $(n+1)$-est értünk, ahol $f : S \to A$ egy kimenetel-függvény, $p_i : S \to \mathbb{R}$ pedig az i. játékos által fizetendő összeg. Mivel az i. játékos *valódi* értékelési függvénye $\hat{v}_i \in S_i$, $v \in S$ esetén az i. játékos nyeresége

$$u_i(v) = \hat{v}_i(f(v)) - p_i(v).$$

Rögzített $\mathcal{M}$ mechanizmus tehát egy n szereplős játékot definiál. A stratégiák az értékelési függvények: minden játékos nyilatkozik a saját értékelési függvényéről, de nem feltétlenül mond igazat. A valódi $\hat{v}_i$ értékelési függvényét csak ő tudja; az általa mondott $v_i \in S_i$ értékelési függvény ettől különbözhet, a nyereségében azonban $\hat{v}_i$ is megjelenik.

A Vickrey-árverésben $A = [n]$, és $S_i = \mathbb{R}_+$ minden i-re, mivel minden játékos stratégiáját egy v_i pozitív számmal, a licitjével tudjuk egyértelműen leírni. A kimenetel-függvény: $f(\mathbf{v}) = a$ arra az a. játékosra, aki a legnagyobb v_i értéket mondja. A fizetendő összegek: $p_i(\mathbf{v}) = 0$ ha $i \neq a$, $p_a(v)$ pedig a második legnagyobb licit értéke. (Több azonos legnagyobb licit esetén tetszőlegesen, pl. egy előre rögzített sorrend szerint választunk győztest; a nyeresége viszont 0 lesz, mivel a második legnagyobb licit is ugyanannyi, mint az övé.)

A 4.20. állításban láttuk, hogy az i. játékos egyértelmű domináns stratégiája $\hat{v}_i$. Ezt általánosítva, egy $\mathcal{M}$ mechanizmus **taktikázásbiztos**, hogyha minden játékosnak a valódi értékelési függvénye domináns stratégiája. Képlettel felírva: $u_i(\hat{v}_i, \mathbf{v}_{-i}) \geq u_i(\mathbf{v})$, bármely $\mathbf{v} \in S$ értékelési függvényekre (mint korábban, $\mathbf{v}_{-i}$ a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ vektort jelöli).

Ezt a jelölést kissé megváltoztatva, ekvivalensen a következő formában írhatjuk fel. Legyen $\hat{a} = f(\hat{v}_i, \mathbf{v}_{-i})$ és $a' = f(\mathbf{v})$. Ekkor

$$\hat{v}_i(\hat{a}) - p_i(\hat{v}_i, \mathbf{v}_{-i}) \geq \hat{v}_i(a') - p_i(\mathbf{v}). \tag{8}$$

A definíció azt fejezi ki, hogy függetlenül attól, hogy egy játékos mit tud, sejt vagy spekulál a többi játékos értékelési függvényéről, neki mindig az a legjobb választása, hogy elárulja a saját valódi függvényét.

4.3.2. Vickrey-Clarke-Groves mechanizmusok

Az előző fejezet lehetetlenségi eredményeivel ellentétesen, megadjuk taktikázásbiztos mechanizmusok egy általános osztályát.

4.21. definíció. $\mathcal{M} = (f, p_1, \ldots, p_n)$-t **Vickrey-Clarke-Groves (VCG) mechanizmusnak** nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak.

– $f(v_1, \ldots, v_n) \in \operatorname{argmax}_{a \in A} \sum_i v_i(a)$, vagyis olyan alternatívát választunk, amely maximalizálja a játékosok összértékét.

– Legyenek $h_1, \ldots, h_n$ rögzített függvények, úgy hogy $h_i : S_{-i} \to \mathbb{R}$ (vagyis h_i nem függ v_i-től). Ekkor minden $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in S$-re

$$p_i(\mathbf{v}) = h_i(\mathbf{v}_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(\mathbf{v})).$$

4.22. tétel (Vickrey, Clarke, Groves, 1973)**.** *Minden VCG-mechanizmus taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy (8) teljesül; használjuk az ottani $\hat{a}$ és a' jelöléseket. Adott i-re a baloldal értéke $\hat{v}_i(\hat{a}) + \sum_{j \neq i} v_j(\hat{a}) - h_i(\mathbf{v}_{-i})$, a jobboldal pedig $\hat{v}_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a') - h_i(\mathbf{v}_{-i})$. A definíció első része miatt $\hat{a} \in \operatorname{argmax}_{a \in A}(\hat{v}_i(a) + \sum_{j \neq i} v_i(a))$, tehát $\hat{v}_i(\hat{a}) + \sum_{j \neq i} v_j(\hat{a}) \geq \hat{v}_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a')$. □

Tegyük most fel, hogy a játékban minden valódi hasznosság nemnegatív: $\hat{v}_i \geq 0$. Azt mondjuk, hogy a játék **veszteségmentes**, ha a valódi értékelési függvényt bevalló játékosoknak sosem kell többet fizetni a hasznosságuknál. További természetes kívánalom a **szubvenciómentesség**, hogy a mechanizmus senkinek se fizessen pénzt, azaz $p_i \geq 0$.

A **Clarke-szabály** a következő h_i függvényt definiálja. Legyen

$$h_i(\mathbf{v}_{-i}) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a), \tag{9}$$

ami azt fejezi ki, hogy mennyi az i. játékos kihagyásával elérhető legnagyobb hasznosság. A definíciókból azonnal látható:

4.23. tétel. *Nemnegatív hasznosságok esetén a Clarke-szabállyal definiált VCG-mechanizmus veszteség- és szubvenciómentes.*

A 4.3.1. fejezetben látott *Vickrey-árverés* éppen egy ilyen típusú mechanizmus. Ekkor

$$A = \{\text{az } i. \text{ játékos nyer} \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

A VCG-mechanizmus definíciójával összhangban, az az a játékos nyer, aki a legtöbbet ígéri, ugyanis $a \in A$-ra $\sum v_i(a) = v_a(a) = w_a$.

Vegyük észre, hogy ha $i \neq a$, akkor $h_i(\mathbf{v}_{-i}) = \sum_{j \neq i} f(a) = w_a$, vagyis $p_i(\mathbf{v}) = 0$ – aki nem nyert, annak nem is kell fizetnie. Ha pedig $i = a$, akkor $\sum_{j \neq a} f(a) = 0$, tehát $p_a(\mathbf{v}_{-a}) = h_a(\mathbf{v}_{-a})$, és ez éppen a második legnagyobb w_j értékkel lesz egyenlő.

4.24. feladat. Tegyük fel, hogy nem egy, hanem k egyforma tárgyat szeretnénk árverezni. Mindenki legfeljebb egyet szeretne megszerezni. Bizonyítsuk be, hogy a Clarke-szabállyal a VCG mechanizmus a k legnagyobb árat ígérő játékosnak ad egy-egy példányt, és mindannyiuknak a $(k + 1)$. legnagyobb árat kell kifizetni!

A Clarke-szabálynál használt $v_i \geq 0$ feltevés sok esetben nem áll fenn. Ilyen esetekben is használhatjuk azonban a (9) definíciót.

A **fordított árverés** feladatban egy szolgáltatást szeretne megvásárolni valaki. n szolgáltató tesz árajánlatot, ezek közül választ egyet. Az i. szolgáltató költsége w_i; ha t áron bízzák meg a szolgáltatás elvégzésével, akkor a haszna $t - w_i$, ha pedig nem őt bízzák meg, akkor 0. A Clarke-szabály által adott mechanizmusban a legolcsóbb árajánlatot kell választanunk, és ennek az ajánlattevőnek a második legkisebb árat kell kifizetni.

A **kétoldalú keresekedelemben** két játékos vesz részt, a vevő és az eladó. Az eladó által felkínált tárgy számára b, a vevő számára a összeget ér. A játék két lehetséges kimenetele az, hogy kötnek (k), vagy pedig nem kötnek üzletet (ℓ). Üzletkötés esetén tehát a vevő nyeresége $v_1(k) = a$, az eladóé $v_2(k) = -b$. Elvárjuk azt is, hogy ha nem kötnek üzletet, akkor nincs nyereségük vagy veszteségük: $v_1(\ell) = v_2(\ell) = 0$, és nem is kell egyiküknek sem fizetni. VCG-mechanizmusban akkor kell az üzletkötést választani, ha $a > b$. Abból a feltételből, hogy az üzlet meg nem kötése esetén nincsen kifizetés, következik, hogy a h_1 és h_2 függvények azonosan nullák. Vagyis az üzlet megkötése esetén az eladónak a-t kell kapnia, a vevőnek pedig b-t fizetnie. Az egyetlen VCG mechanizmusban tehát valahonnan kívülről $a - b$ összeggel támogatni kell a tranzakciót, ami irreálissá teszi az alkalmazhatóságot ebben a szituációban.

Egy másik példa, ahol külső támogatásra van szükség a **közösségi építkezés** esete. Tegyük fel, hogy egy $n - 1$ lakosú város szeretne belefogni egy vállalkozásba, például egy metró vagy egy iskola megépítésébe. Ennek költsége C, és az i. lakos számára a hasznossága v_i. Negatív v_i azt jelenti, hogy az illető számára kárt okoz a létesítmény. Vegyünk hozzá egy fiktív n. játékost, aki a közösséget jelképezi, és haszna $-C$ ha építkeznek, egyébként 0. A VCG mechanizmusban akkor választják az építkezést, ha $\sum_{i=1}^{n-1} v_i > C$. A Clarke-szabályt alkalmazva építkezés esetén az i. játékosnak akkor kell fizetnie, ha $v_i > 0$, és $\sum_{j\neq i} v_i < C$, vagyis az ő hasznát figyelmen kívül hagyva már nem érné meg építkezni. Ekkor $p_i = C - \sum_{j\neq i} v_i$-t kell fizetnie. Hasonlóan, ha az építkezés ellen döntenek, akkor az i. játékosnak $v_i < 0$ és $\sum_{j\neq i} v_i > C$ esetén kell fizetnie, vagyis ha az ő szavazatával hiúsult meg az építkezés; büntetése $p_i = \sum_{j\neq i} v_i - C$. Könnyen elképzelhető olyan szituáció tehát, amikor egy ember véleménye miatt sem kell módosítani a döntést; ekkor a mechanizmus szerint senkitől nem szedhetünk pénzt.

Szponzorált keresés. A VCG mechanizmus egy érdekes alkalmazása az online keresési felületeken a szponzorált találatok elhelyezése; ezt nevezzük szponzorált keresési árverésnek. Tegyük fel, hogy a keresési eredményeket mutató weblapon k hirdetési hely van, amik nem egyformán feltűnőek: annak a valószínűsége, hogy a felhasználó a j-edik helyen elhelyezett hirdetésre kattint, α_j. Feltesszük, hogy $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k$. Adott n cég, akik arra licitálnak, hogy ha egy adott kulcsszavú keresés bejön, akkor az egyik hirdetési helyen az ő hirdetésük szerepeljen. (Természetesen ezt nem úgy kell elképzelni, hogy minden egyes keresésnél ténylegesen lezajlik egy ilyen licitálás; a liciteket algoritmusok határozzák meg a cégek által megadott preferenciák alapján).

A lehetséges kimenetelek tehát a párosítások cégek és hirdetési helyek között. Feltesszük, hogy minden cég számára a hirdetési helyek értéke a kattintási valószínűségekkel arányos. Tehát az i-edik cég tényleges értékelési függvénye a j-edik helyhez $\alpha_j \hat{v}_i$ értéket rendel, valamilyen $\hat{v}_i \in \mathbb{R}^n_+$ értékre. Hasonlóan, az i-edik játékos S_i stratégia-halmazában is csak ilyen értékelési függvények vannak, tehát a játékos egy v_i értéket licitál, és a j-edik helyhez tartozó licitje $\alpha_j v_i$.

Nézzük, milyen árverést ad erre a feladatra a VCG mechanizmus. Azt a kimenetelt kell választanunk, amelyiknek össz-értéke a legnagyobb. Könnyen látható, hogy ezt úgy kapjuk, hogy a j-edik hirdetési helyet a j-edik legnagyobb licitet adó cégnek adjuk. A fizetendő összegek kiszámolásához az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a licitek eleve csökkenő sorrendben vannak, azaz $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_k$. A Clarke-szabály szerint az i-edik játékos által fizetendő összeg $\max_{a\in A} \sum_{j\neq i} v_j(a) - \sum_{j\neq i} v_j(f(v))$. A második összeg $\sum_{j\in[k]-i} \alpha_j v_j$. Az első összeg kiszámolásához azt kell észrevenni, hogy most a v_i kivételével kell a liciteket sorrendben a hirdetési helyekhez rendelni, így $\max_{a\in A} \sum_{j\neq i} v_j(a) = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j v_j + {}$ $+ \sum_{j=i}^{k} \alpha_j v_{j+1}$. Azt kaptuk, hogy $p_i(v) = \sum_{j=i}^{k} v_{j+1}(\alpha_j - \alpha_{j+1})$, ahol az $\alpha_{k+1} = 0$ jelölést használjuk.

4.25. megjegyzés. A gyakorlatban a fizetés általában úgy valósul meg, hogy a cégek ténylegesen csak akkor fizetnek, ha a felhasználó a hirdetésükre klikkel. Hogy átlagban kijöjjön a fenti összeg, az i-edik játékosnak klikkenként $\sum_{j=i}^{k} v_{j+1}(\alpha_j - \alpha_{j+1})/\alpha_i$-t kell fizetnie. Persze itt feltettük, hogy a felhasználók α_i valószínűséggel klikkelnek, függetlenül attól, hogy mi szerepel a hirdetésen.

4.3.3. Hátizsák-árverés

A hátizsák-árverés a hátizsák-feladat árveréses változata. Összesen b mennyiségű erőforrás áll rendelkezésre, erre licitálnak a játékosok. Az i-edik játékos erőforrás-igénye a_i. A feladat eldönteni, hogy kiknek az erőforrás-igényét teljesítsük, és mennyit fizessenek. Ilyen jellegű árverések előfordulnak például reklámidő-értékesítésnél, szerverek bérbeadásánál, vagy szuperszámítógépek processzor-idejének a beosztásánál.

A hátizsák-árverésre alkalmazhatjuk a VCG-mechanizmust. Ekkor $f(v)$ optimális megoldása lesz a hátizsákfeladatnak a_i súlyokkal és v_i értékekkel. Tekintsük úgy, hogy $f(v) \subseteq [n]$, azaz $f(v)$ a játékosoknak az a részhalmaza, akiknek teljesítjük az erőforrás-igényét v licitek esetén. A Clarke-szabály szerint ha $i \notin f(v)$, akkor $p_i(v) = 0$, ha pedig $i \in f(v)$, akkor

$$p_i(v) = \max\left\{\sum_{j\neq i} v_j x_j :\ x \in \{0,1\}^n,\ \sum_{j\neq i} a_j x_j \leq b\right\} - \sum_{j\in f(v)-i} v_j.$$

Ez a mechanizmus taktikázásbiztos, veszteségmentes és szubvenciómentes. Azonban a hátizsákfeladatot NP-nehéz megoldani, úgyhogy sok játékos esetén problémás lehet. Felmerül a kérdés, hogy ha van egy közelítő algoritmusunk a hátizsákfeladatra, abból tudunk-e hasonlóan jó tulajdonságú mechanizmust alkotni. Az derül ki, hogy ha a közelítő algoritmusunk az alább definiált értelemben *monoton*, akkor igen!

4.26. definíció. A hátizsák-árverésnél egy f kimenetel-függvény **monoton**, ha tetszőleges i-re és $v \in S$-re teljesül a következő: ha $i \in f(v)$ és $v_i' \geq v_i$, akkor $i \in f(v_i', v_{-i})$.

4.27. tétel. *Ha f monoton kimenetel-függvény, akkor a következő mechanizmus taktikázásbiztos, veszteségmentes és szubvenciómentes: $p_i(v)$ legyen 0, ha $i \notin f(v)$, egyébként pedig az infimuma azoknak a v_i' értékeknek, amikre $i \in f(v_i', v_{-i})$.*

Bizonyítás. A szubvenciómentesség és veszteségmentesség nyilvánvaló a definícióból. A taktikázásbiztossághoz először nézzük azt az esetet, amikor $i \notin f(\hat{v}_i, v_{-i})$, azaz $u_i(\hat{v}_i, v_{-i}) = 0$. Legyen β_i az infimuma azoknak a v_i' értékeknek, amikre $i \in f(v_i', v_{-i})$. A monotonitás miatt $\beta_i \geq \hat{v}_i$. Ha az i-edik játékos β_i-nél kevesebbet licitál, akkor a haszna 0, ha pedig többet, akkor β_i-t fizet, tehát a haszna $\hat{v}_i - \beta_i \leq 0$.

Tegyük fel most, hogy $i \in f(\hat{v}_i, v_{-i})$. Mivel bármilyen olyan v_i' licitre, amire $i \in f(v_i', v_{-i})$, ugyanannyit fizet, ilyennel nem jár jobban. Ha pedig $i \notin f(v_i', v_{-i})$, akkor a haszna 0, amivel szintén nem jár jobban. □

Tudunk-e olyan közelítő algoritmust adni a hátizsák-feladatra, ami monoton kimenetel-függvényt definiál? Az alábbiakban megadunk egy ilyen 2-közelítést. Feltesszük, hogy minden $a_i \leq b$ minden i-re. Igazából két mohó algoritmust adunk meg:

1. rakjuk sorba a játékosokat v_i/a_i szerint csökkenő sorrendben, és teljesítsük sorrendben az erőforrás-igényeiket. Legyen $f_1(v)$ az ebből kapott kimenetel-függvény.

2. rakjuk sorba a játékosokat v_i szerint csökkenő sorrendben, és teljesítsük sorrendben az erőforrás-igényeiket. Legyen $f_2(v)$ az ebből kapott kimenetel-függvény.

Könnyű látni, hogy f_1 és f_2 is monoton; sőt, $f_1(v)$ és $f_2(v)$ sem változik, ha egy benne szereplő i indexre növeljük v_i-t. Legyen $f(v)$ a nagyobb összértéket adó az $f_1(v)$ és $f_2(v)$ közül; így $f(v)$ is monoton (mert ha i benne van $f_1(v)$ és $f_2(v)$ közül a nagyobb összértékűben, akkor v_i-t növelve is ugyanaz marad a nagyobb összértékű). Ahhoz, hogy a 2-közelítést bizonyítsuk, figyeljük meg, hogy a hátizsákfeladat optimumára felső korlát az LP-relaxáció optimuma, amit mohó algoritmussal kiszámolhatunk: sorbarakjuk a játékosokat v_i/a_i szerint csökkenő sorrendben, és ebben a sorrendben teljesítjük az erőforrás-igényeiket. Mivel itt tört megoldás is megengedett, az utolsó még beférő játékosnak lehet hogy csak részben teljesítjük az erőforrás-igényét. Legyen $i(v)$ az utolsó (részben) beférő játékos, és legyen $F(v)$ a többi beférő játékos halmaza. Ekkor egyrészt $\sum_{i\in f_1(v)} v_i \geq \sum_{i\in F(v)} v_i$, másrészt $\sum_{i\in f_2(v)} v_i \geq v_{i(v)}$, tehát $2\sum_{i\in f(v)} v_i \geq \sum_{i\in F(v)} v_i + v_{i(v)}$, ami legalább annyi mint az LP-relaxáció optimuma.

4.3.4. Általánosított Vickrey árverés

Ha több tárgyat is árverezünk, akkor egy lehetőség, hogy külön-külön Vickrey árveréseket rendezünk mindegyikre. Ez azonban feltételezi, hogy a játékosok értékelése a különböző tárgyakra egyszerűen összeadódik ha több tárgyat szereznek meg. Ez sok esetben nem reális: előfordulhat hogy két tárgy egymás nélkül nem használható, ezért külön-külön kevesebbet érnek; de a másik irányú egyenlőtlenség is gyakori: több tárgynak kb. ugyanaz a funkciója, ezért csak az egyiküket akarjuk megvenni, többet felesleges.

Hogy ezeket az általánosabb preferenciákat is kezelni tudjuk, úgy vesszük, hogy minden játékosnak a tárgyak összes lehetséges részhalmazára van egy értékelése, ami azt fejezi ki, hogy mennyit ér neki, ha pontosan azt a részhalmazt kapja. Formálisan legyen B a tárgyak halmaza, S_i legyen $2^B \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvények egy halmaza, $\hat{v}_i$ pedig egy konkrét halmazfüggvény S_i-ből, az i. játékos tényleges értékelés-függvénye. A játék lehetséges kimenetelei a rendezett $(C_1, \dots, C_n)$ részpartíciói B-nek: az i. játékos a C_i-beli tárgyakat kapja. Itt megengedjük, hogy egyes C_i halmazok üresek legyenek, azaz bizonyos játékosok ne kapjanak semmit. Nézzük meg, hogyan működik a VCG mechanizmus a Clarke-szabállyal ebben az esetben.

Adott $\mathbf{v} \in S$-re $f(v_1, \dots, v_n) \in \operatorname{argmax}_{a \in A} \sum_i v_i(a)$, azaz egy olyan $(C_1(v), \dots, C_n(v))$ részpartíciót választunk, ami az összes $X_1, \dots, X_n$ részpartíció közül a legnagyobb $\sum_i v_i(X_i)$ értéket adja. Sajnos egy ilyen részpartíció megtalálása NP-nehéz feladat, de ezzel most nem foglalkozunk. A játékosok által fizetendő összeg meghatározásához vezessük be a következő jelölést: $X \subseteq B$ és $i \in [n]$ esetén

$$v_{-i}(X) = \max \left\{ \sum_{j \neq i} v_j(X_j) : \{X_j\}_{j \neq i} \text{ részpartíciója } X\text{-nek} \right\}.$$

Ezzel a jelöléssel a következő képletet kapjuk:

$$p_i(\mathbf{v}) = v_{-i}(B) - v_{-i}(B \setminus C_i(v)).$$

Az i. játékos nyeresége tehát:

$$u_i(\mathbf{v}) = \hat{v}_i(C_i(v)) - v_{-i}(B) + v_{-i}(B \setminus C_i(v)).$$

Könnyen látható, hogy itt teljesül a veszteség-mentesség és a szubvenció-mentesség.

Mivel ez VCG mechanizmus, a korábban bizonyított tétel szerint taktikázásbiztos is. Ennek ellenére két komoly probléma is van vele, a fent említett NP-nehézségen kívül, amik miatt a gyakorlatban nem túl népszerű. Az egyik, hogy könnyű olyan példákat mutatni, ahol a vevők jóval kevesebbet fizetnek, mint amennyit a tárgyak számukra érnek; emiatt a mechanizmus az árverés rendezője szempontjából nem tűnik ideálisnak. A másik probléma talán még kritikusabb, mert a taktikázás-biztosságot kérdőjelezi meg: egy vevő jól járhat, ha több álnév alatt licitál. Nézzünk erre egy példát: 2 játékos van, és két tárgy. Az első játékos a tárgyakat egyenként 3-ra, együtt 6-ra értékeli, míg a második egyenként 2-re, együtt 5-re. Ha mindketten a saját értékelésüket mondják, akkor az első játékos kapja mindkét tárgyat, és az általa fizetendő összeg

$$v_2(B) - v_2(B \setminus C_1(v)) = 5 - 0 = 5.$$

Ha azonban két külön személyként jelentkezik be az árverésre, és mindkettő nevében 3-at licitál külön-külön mindkét tárgyra, akkor az egyik tárgyat az egyik, a másikat a másik személyként kapja meg, és egyenként a fizetendő összeg

$$v_{-i}(B) - v_{-i}(B \setminus C_i(v)) = 5 - 3 = 2,$$

tehát az első játékos összesen 4-et fizet.

Szerencsére van egy feltétel, ami sok árverési szituációban természetes, és biztosítja, hogy ne érje meg ál-licitálókkal manipulálni. Emlékeztetőül, egy $b : 2^B \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény **szubmoduláris**, ha $b(X_1) + b(X_2) \geq b(X_1 \cap X_2) + b(X_1 \cup X_2)$ minden $X_1, X_2 \subseteq B$-re.

4.28. tétel. *Ha a v_{-i} halmazfüggvény szubmoduláris, akkor az i. játékosnak nem érdemes több személy nevében licitálni az általánosított Vickrey árverésen.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az i. játékos $k > 1$ személy nevében licitál, és $v_i^1, \ldots, v_i^k$ értékelésfüggvényeket mond be. Belátjuk, hogy jobban jár, ha a saját $\hat{v}_i$ értékelését használja. Bevezetjük a v^{-j} ($j \in [k]$) halmazfüggvényeket a

$$v^{-j}(X) = \max\left\{\sum_{s \neq i} v_s(X_s) + \sum_{t \neq j} v_i^t(X_i^t) : \{X_s\}_{s \neq i} \cup \{X_i^t\}_{t \neq j} \text{ részpartíciója } X\text{-nek}\right\}$$

definícióval.

Az ál-játékosos játékban egy $C_1, \ldots, C_i^1, \ldots, C_i^k, \ldots, C_n$ részpartíciót kapunk; legyen $C = C_1 \cup \cup \ldots \cup C_{i-1} \cup C_{i+1} \cup \ldots \cup C_n$.

Az i. játékos haszna

$$\hat{v}_i(B \setminus C) - \sum_{j=1}^{k} v^{-j}(B) + \sum_{j=1}^{k} v^{-j}(B \setminus C_i^j).$$

Vegyük észre, hogy $v^{-j}(B \setminus C_i^j) = v_{-i}(C) + \sum_{t \neq j} v_i^t(C_i^t)$ a részpartíció optimális választása miatt. Másrészt $v^{-j}(B) \geq v_{-i}(C \cup C_i^j) + \sum_{t \neq j} v_i^t(C_i^t)$. Így az i. játékos haszna, ha álneveket használ, legfeljebb

$$\hat{v}_i(B \setminus C) + k v_{-i}(C) - \sum_{j=1}^{k} v_{-i}(C \cup C_i^j).$$

Most nézzük azt a játékot, ahol az i. játékos a saját $\hat{v}_i$ értékelését használja. Legyen a mechanizmus által választott partíció $\hat{C}_1, \ldots, \hat{C}_n$. Az i. játékos nyeresége

$$\hat{v}_i(\hat{C}_i) - v_{-i}(B) + v_{-i}(B \setminus \hat{C}_i).$$

A $\hat{C}_1, \ldots, \hat{C}_n$ partíció optimalitása miatt $\hat{v}_i(\hat{C}_i) + v_{-i}(B \setminus \hat{C}_i) \geq \hat{v}_i(B \setminus C) + v_{-i}(C)$, így az i. játékos nyeresége legalább

$$\hat{v}_i(B \setminus C) + v_{-i}(C) - v_{-i}(B).$$

A tétel innen következik abból, hogy v_{-i} szubmodularitása miatt

$$(k-1)v_{-i}(C) + v_{-i}(B) \leq \sum_{j=1}^{k} v_{-i}(C \cup C_i^j).$$

□

4.3.5. Optimális árverések

Térjünk vissza a sima Vickrey árverés témájához, ahol egyetlen tárgyat szeretnénk elárverezni, azonban most nézzük az árverés hasznát az eladó szemszögéből! Ő nyilván szeretne minél nagyobb bevételt elérni, tehát neki az a jó, ha az eladási ár magas. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy két vevő van, és a $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ értékelésüket egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással választjuk a (0,1) intervallumból.

4.29. állítás. *Ha a vevők a valódi értékelésüket licitálják, akkor a Vickrey árverés szabályai szerint az eladási ár várható értéke 1/3.*

Bizonyítás. Az eladási ár $\min\{v_1, v_2\}$. Egy adott $t \in (0{,}1)$ számra annak a valószínűsége, hogy $\min\{v_1, v_2\} > t$, könnyen láthatóan $(1-t)^2$. A várható értékre vonatkozó képlet alapján

$$E(\min\{v_1, v_2\}) = \int_0^1 \Pr(\min\{v_1, v_2\} > t)dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

□

Lehet-e egy taktikázásbiztos mechanizmussal ennél nagyobb várható bevételt elérni? A válasz igen, sőt, bizonyos értelemben meg tudjuk adni az optimális mechanizmust. Ehhez csak kicsit kell változtatni a Vickrey árverésen. A **félretételi áras Vickrey árverés** a következőképpen működik. Rögzítünk előre egy r félretételi árat (reservation price). Ha a legnagyobb licit kisebb mint r, akkor senkinek sem adjuk el a tárgyat. Ha a legnagyobb licit legalább r, akkor a nagyobb ajánlatot tevőnek adjuk el, az ár pedig a kisebb ajánlat és r maximuma. Vegyük észre, hogy ez olyan, mintha maga az eladó r-et licitálna egy normál Vickrey-árverésen. Ebből következik a taktikázásbiztosság is, hiszen a vevők szempontjából ez ugyanolyan, mint egy Vickrey árverés. Azaz feltehetjük, hogy a játékosok itt is a valódi értékelésüket licitálják.

4.30. állítás. *Az $\frac{1}{2}$ félretételi áras Vickrey árverésnél az eladási ár várható értéke 5/12.*

Bizonyítás. Három esetet különböztetünk meg.

– Ha $\max\{v_1, v_2\} < \frac{1}{2}$, akkor az eladási ár 0. Ennek valószínűsége 1/4.

– Ha $\min\{v_1, v_2\} \geq \frac{1}{2}$, akkor az eladási ár várható értéke 2/3 (ez ugyanúgy számolható ki, mint az előző állításnál). Ennek valószínűsége is 1/4.

– A harmadik eset, ha $\max\{v_1, v_2\} \geq \frac{1}{2}$, és $\min\{v_1, v_2\} < \frac{1}{2}$. Ekkor az eladási ár a szabályok szerint pontosan $\frac{1}{2}$. Ennek az esetnek a valószínűsége 1/2.

A várható érték tehát: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$. □

Most megmutatjuk, hogy ennél nagyobb várható bevételt nem lehet elérni, és általánosítjuk is az eredményt. A továbbiakban a játékosok száma bármilyen n szám lehet.

4.31. tétel (Myerson, 1981)**.** *Egy veszteségmentes és szubvenciómentes mechanizmus az árverési feladatra pontosan akkor taktikázásbiztos, ha minden i-re, és v_{-i}-t bárhogy rögzítve,*

i) Ha az i-edik játékos egy v_i licittel megkapja a tárgyat, akkor nagyobb licit esetén is.

ii) Legyen α az infimuma azoknak a v_i liciteknek, amikre i kapja a tárgyat. Ha egy v_i licitnél i kapja a tárgyat, akkor $p_i(v_i, v_{-i}) = \alpha$, egyébként pedig $p_i(v_i, v_{-i}) = 0$.

Bizonyítás. Az, hogy a feltételek teljesülése esetén a mechanizmus taktikázásbiztos, ugyanúgy látható, mint a Vickrey aukciónál. Tegyük fel, hogy i) nem teljesül, azaz létezik v_{-i} és $v_i < v_i'$, hogy v_i licit esetén i nyer, v_i' licit esetén viszont nem. Nézzük azt az esetet, amikor $\hat{v}_i = v_i'$. A taktikázásbiztosság miatt $p_i(v_i, v_{-i}) \geq \hat{v}_i = v_i' > v_i$, ez viszont ellentmond a veszteségmentességnek.

Most belátjuk, hogy ii) is teljesül. Legyen $\beta = \inf\{p_i(v_i, v_{-i}) : v_i \text{ licit mellett } i \text{ kapja a tárgyat}\}$. A taktikázásbiztosság miatt $p_i(v_i, v_{-i}) = \beta$ minden olyan v_i-re, amire i kapja a tárgyat. Másrészt a veszteségmentesség miatt $\beta \leq \alpha$. Ha $\beta < \alpha$, akkor $\beta < \hat{v}_i < \alpha$ esetén érdemes lenne $\hat{v}_i$-nél nagyobbat licitálni hogy megkapjuk a tárgyat, ellentmondásban a taktikázásbiztossággal. Azt kaptuk tehát, hogy $\beta = \alpha$, azaz ii) első fele teljesül. Az állítás második fele triviális: ha i a v_i licittel nem kapja meg a tárgyat, akkor a veszteségmentesség miatt $p_i(v_i, v_{-i}) \leq 0$, a szubvenció-mentesség miatt pedig $p_i(v_i, v_{-i}) \geq 0$. □

Az alábbiakban Myerson optimális árverési tételének azt a speciális esetét mondjuk ki és bizonyítjuk, ahol a játékosok értékelései független $\hat{v}_i$ valószínűségi változók a (0,1) intervallumból. Feltesszük, hogy az eloszlásoknak van sűrűség-függvénye, és hogy az árverező ismeri ezeket az eloszlásokat. Jelöljük F_i-vel az i-edik játékos értékelésének az eloszlás-függvényét, f_i-vel pedig a sűrűség-függvényét, és legyen

$$\phi_i(t) = t - \frac{1 - F_i(t)}{f_i(t)}.$$

4.32. tétel (Myerson, 1981)**.** *Tetszőleges veszteségmentes, szubvenciómentes és taktikázásbiztos mechanizmus esetén, ha a játékosok a valódi értékelésüket licitálják, a várható profit*

$$E(\phi_i(v_i) : i \text{ kapja a tárgyat}).$$

Bizonyítás. Először nézzük az i-edik játékos által várhatóan fizetett összeget. Ha v_{-i}-t rögzítjük, és α az infimuma azoknak a v_i liciteknek, amikre i kapja a tárgyat, akkor az i által fizetett ár várható értéke a 4.31. tétel értelmében $\alpha(1 - F_i(\alpha))$, hiszen α-nál nagyobb licit esetén α-t fizet, kisebb licit esetén pedig semmit. Írjuk most fel az $\alpha(1 - F_i(\alpha))$ értéket jóval bonyolultabban!

$$\begin{aligned}\alpha(1 - F_i(\alpha)) &= \int_\alpha^1 \alpha f_i(t)dt = \int_{t=\alpha}^1 (t - \int_{z=\alpha}^t 1dz) f_i(t)dt = \int_\alpha^1 t f_i(t)dt - \int_{z=\alpha}^1 \int_{t=z}^1 f_i(t)dtdz \\ &= \int_\alpha^1 t f_i(t)dt - \int_\alpha^1 (1 - F_i(z))dz = \int_\alpha^1 \phi_i(t) f_i(t)dt.\end{aligned}$$

Azaz rögzített v_{-i} esetén az i-edik játékos által várhatóan fizetett összeg $\int_\alpha^1 \phi_i(t) f_i(t)dt$, ahol α a fent meghatározott szám. Ha v_{-i} nem rögzített, és X_i az a valószínűségi változó, aminek az értéke $\phi_i(v_i)$ ha i kapja a tárgyat és 0 különben, akkor az i-edik játékos által várhatóan fizetett összeg $E(X_i)$. A várható érték linearitása miatt ebből következik a tétel. □

A tétel alapján akkor érhetjük el a legnagyobb várható profitot, ha mindig annak a játékosnak adjuk a tárgyat, akinél $\phi_i(v_i)$ a legnagyobb – kivéve, ha $\phi_i(v_i) < 0$ minden i-re, mert akkor senkinek sem adjuk! Ezen alapul a Myerson-féle árverés, aminek a lépései a következők:

1. Bekérjük a v_i ajánlatokat, és kiszámoljuk a $\phi_i(v_i)$ értékeket.
2. Ha $\phi_i(v_i) < 0$ minden i-re, akkor senki sem kapja meg a tárgyat
3. Ellenkező esetben az a játékos kapja a tárgyat, akinél $\phi_i(v_i)$ a legnagyobb. Legyen $\phi_j(v_j)$ a második legnagyobb érték, és legyen $q = \max\{\phi_j(v_j),0\}$. A győztes játékos által fizetendő összeg: $\phi_i^{-1}(q)$.

Az árverés nyilván szubvenciómentes, hiszen $\phi_i^{-1}(q) \geq 0$. A veszteségmentesség és a taktikázásbiztosság azonban nem ilyen egyszerű, sőt, csak akkor jön ki, ha $\phi_i(t)$ monoton növő minden i-re (ez pl. teljesül egyenletes eloszlás esetén).

4.33. tétel. *Ha $\phi_i(t)$ monoton növő minden i-re, akkor a Myerson-féle árverés veszteségmentes és taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. A veszteségmentesség abból következik, hogy $q \leq \phi_i(v_i)$, tehát a monotonitás miatt $\phi_i^{-1}(q) \leq v_i$. A taktikázásbiztossághoz azt kell belátnunk, hogy a 4.31. tétel feltételei teljesülnek. Az i) feltétel egyből következik ϕ_i monotonitásából, a ii) feltétel pedig onnan látszik, hogy rögzített v_{-i} értékek esetén q is rögzített ha i kapja a tárgyat, tehát $\phi_i^{-1}(q)$ is. □

Ha a játékosok értékelése azonos eloszlású (F eloszlásfüggvénnyel és f sűrűségfüggvénnyel), akkor a következőt kapjuk:

4.34. következmény. *Legyen $\phi(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$. A $\phi^{-1}(0)$ félretételi áras Vickrey árverés a lehető legnagyobb várható profitot éri el a veszteségmentes, szubvenciómentes és taktikázásbiztos mechanizmusok között.*

4.3.6. Emelkedő áras árverések

Eddig olyan árveréseket néztünk, ahol minden licitáló egyszerre, egyetlen alkalommal ad le licitet. Azonban a klasszikus árverések nem így zajlanak, hanem a résztvevők egyre magasabb árakat vállalva egymásra licitálnak. Az ilyen több körös megoldásnak van egy fontos pszichológiai előnye az árverező szempontjából: a résztvevők a többiekkel versenyezve hajlamosak magasabb árakig elmenni, mint amit eredetileg elképzeltek, így az árverezőnek nagyobb a bevétele.

A több körös árveréseknek nagyon sok típusa van; itt csak a legegyszerűbbet említjük meg, az úgynevezett **angol árverést**. Egyetlen tárgyat árverezünk. Az ár egy, a kikiáltó által meghatározott alapértékről (kikiáltási árról) indul, és adott lépésközönként lép felfelé. Minden licitálónak jeleznie kell, hogy tartja-e az adott árat; ha egy ponton kiszáll, akkor nem léphet be újra később. A licitnek akkor van vége, ha már csak egy licitáló adja meg az árat (ha a licitben maradók egyszerre szállnak ki, akkor pl. lehet véletlenszerűen dönteni).

A több körös árveréseket nehezebb elemezni, mint az egyköröseket, hiszen itt egy játékos stratégiája függhet a többi játékos korábbi licitjeitől. Viszont azt könnyű látni, hogy ha minden játékos a valódi értékelése szerint licitál, akkor az angol árverés lényegében ugyanazt az eredményt adja, mint a félretételi áras Vickrey árverés (ahol a félretételi ár a kikiáltási árnak felel meg).

Felvetődik, hogy ez az egyszerű árverési módszer kiterjeszthető-e több tárgy esetére. Most csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor k darab ugyanolyan tárgyat árverezünk, és az egyszerűség kedvéért azt is feltesszük, hogy a licit 0-ról indul, azaz nincs kikiáltási ár. Az alább ismertetett módszer Ausubel-től származik.

Az i-edik játékos valódi értékelése egy $\hat{v}_i : [k] \to \mathbb{R}_+$ függvény, ahol $\hat{v}_i(j)$ azt fejezi ki, hogy az i-edik játékosnak mennyit ér, ha k tárgyat kap meg. Feltesszük, hogy $\hat{v}_i(j+1) - \hat{v}_i(j) \le \hat{v}_i(j) - \hat{v}_i(j-1)$ minden j-re. Ez pont az értékelőfüggvény szubmodularitásának felel meg, ha halmazfüggvényként tekintjük a tárgyak halmazán.

A licit során az egységárat egyesével növeljük 0-tól kezdve (az elmélet szempontjából kezelhetőbb lenne egy olyan árverés, ahol az ár folytonosan nő, de a gyakorlatban általában a diszkrét lépéses változatot használják). Mikor az ár egy adott t értéknél tart, a játékosok mondanak egy-egy x_i^t számot, ami kb. annak felel meg, hogy t egységáron hány tárgyat hajlandóak venni. A játékosoknak az x_i^t kiválasztásánál két szabályt kell betartaniuk; most csak a fontosabbikat írjuk le, a másikat a további definíciók után ismertetjük. A monotonitási szabály azt jelenti, hogy egy játékos az egységár növekedésével nem akarhat több tárgyat.

Monotonitási szabály: $x_i^t \le x_i^{t-1}$ minden i-re és t-re.

A licit folytatódik, ha $\sum_{i=1}^n x_i^t > k$. Legyen T az a kör, ahol először $\sum_{i=1}^n x_i^T \le k$. Ekkor az árverés befejeződik, és meghatározzuk hogy ki hány tárgyat kap (x_i^* az i-edik játékosnak). Ha $\sum_{i=1}^n x_i^T = k$, akkor legyen $x_i^* = x_i^T$. Ha $\sum_{i=1}^n x_i^T < k$, akkor határozzuk meg (pl. véletlenszerűen) úgy a tárgyak elosztását, hogy $x_i^T \le x_i^* \le x_i^{T-1}$ teljesüljön.

Ahhoz, hogy meghatározzuk, ki mennyit fizet, úgy fogjuk tekinteni, hogy a játékosok már az árverés közben megszereznek tárgyakat. Definiáljuk az i-edik játékos által a t-edik körig megszerzett tárgyak számát: $C_i^t = \max\{0, k - \sum_{j \ne i} x_j^t\}$ ha $t < T$, és $C_i^T = x_i^*$. A második szabály ezekhez az értékekhez kapcsolódik.

Szerzési szabály: $x_i^t \ge C_i^{t-1}$ minden i-re és t-re.

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy mivel az i-edik játékos a t-edik kör előtt már C_i^{t-1} tárgyat megszerzett, nem mondhatja azt, hogy ennél kevesebbet szeretne. Figyeljük meg, hogy a szerzési szabály csak az utolsó körben érdekes: ha akár egyetlen i-re is $x_i^t \le C_i^{t-1}$, akkor a monotonitási szabály miatt $\sum_{j=1}^n x_j^t \le k$, tehát befejeződik az árverés.

Az i-edik játékos t-edik körben szerzett tárgyainak a száma: $c_i^t = C_i^t - C_i^{t-1}$. A definíciókból világos, hogy $c_i^t \ge 0$ minden t-re, és $\sum_{t=1}^z c_i^t = x_i^*$. A c_i^t értékek segítségével határozzuk meg, hogy az egyes játékosoknak mennyit kell fizetni: $p_i = \sum_{t=0}^T t c_i^t$. Azaz: minden játékos annak a körnek az árát fizeti az egyes tárgyaiért, amikor azokat megszerezte.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy ha minden játékos a valódi értékelési függvénye szerint licitál, akkor lényegében ugyanazt a kimenetelt kapjuk, mint a VCG mechanizmusnál. Azért csak „lényegében", mert az árat diszkrét lépésekben emeljük, így nem feltétlenül pont a VCG kimenetelét kapjuk. A valódi értékelés szerinti licit itt azt jelenti, hogy a t-edik körben az i edik játékos azt az x_i^t értéket licitálja, amire $\hat{v}_i(x_i^t) - t x_i^t$ a legnagyobb. Mivel feltettük, hogy $\hat{v}_i$ csökkenő differenciájú, ez az érték monoton csökkenő t-ben, tehát teljesíti a monotonitási szabályt. A szerzemény szabályt ez a licit nem teljesíti automatikusan, tehát az utolsó körben ennek és C_i^{t-1}-nek a maximumát kell licitálni.

4.4. Újraelosztási feladat

Tegyük fel, hogy egy közösség minden tagja rendelkezik valamilyen vagyontárggyal, például egy házzal. Természetesen nem mindenki elégedett a sajátjával, és valaki másénak jobban örülne. Preferenciáik azonban különbözhetnek: elképzelhető például, hogy két ember elégedettebbnek érezné magát, ha házat cserélnének. Tegyük fel, hogy mind az n embernek az összes n házon (köztük a sajátján), adott egy teljes rendezése: $j \succ_i k$, ha az i. ember jobban szeretné a j. ember házát, mint a k-adikét. Egy elosztás egy olyan $i \mapsto \sigma_i$ hozzárendelés, amelyre a σ_i számok az $N = \{1, \ldots, n\}$ halmaz egy permutációját alkotják. Az összes permutációk halmazát A-val jelöljük, az összes preferenciák halmazát P-vel ($|P| = |A| = n!$, a két halmaz valójában ugyanaz). Elosztási mechanizmus alatt egy $f : P^n \to A$ leképezést értünk, amely a bemenetként kapott n preferenciasorrendből megad egy elosztást. Feladatunk a házak egy olyan újraelosztásának megszervezése, amit mindenki méltányosnak ítélhet (ezt definiálni fogjuk alább).

Szorosan ide kapcsolódó, gyakorlatban is fontos feladat a vesecsere probléma. Egyes betegeknek veseátültetésre van szükségük. Szerencsés esetben családi-baráti körben tudnak olyan donort találni, aki felajánlja számukra egyik veséjét. Gyakran viszont ez a vese nem kompatibilis a beteg szervezetével; különböző donorvesék különböző fokon lehetnek megfelelőek. A donorszervek piaci kereskedelme illegális, viszont másik donorszervre való csere megengedett: ha két páciens részére felajánlottak egy-egy vesét, amely számukra nem alkalmas ugyan, de a másik részére megfelelő lenne, akkor mindkettejük hasznára kicserélhetik ezeket a veséket. Lehetséges azonban nagyobb körök mentén is cseréket végrehajtani. Több országban, pl. az Egyesült Államokban létezik országos vesedonor adatbázis, amelyben az itt bemutatotthoz hasonló algoritmussal juttatnak minél több beteget új veséhez. A fenti házcsere modellhez képest fontos különbség, hogy nincs teljes preferenciasorrend: bizonyos vesék egyáltalán nem alkalmasak egyes betegeknek.

A mechanizmus „méltányossága” alatt a taktikázásbiztosság mellett erősebb elvárásunk is lesz. Mielőtt erre rátérnénk, vegyük észre, hogy a 4.15. tétel nem alkalmazható erre a problémára, mivel a preferenciák nem a kimenetek halmazán adottak. Egy játékos szempontjából ugyanolyan értékű két elosztás, amiben ő ugyanazt a házat kapja, függetlenül attól, hogy a többiek közül kinek mi jutott. A 4.15. tételhez azonban arra volt szükség, hogy minden játékosnak az összes kimenetelen legyen egy szigorú preferenciarendezése.

Az eddigi mechanizmusoktól alapvetően különbözik a szituáció abban, hogy a tulajdonosok szabadon rendelkezhetnek a házukkal, mi csak javaslatot tehetünk nekik, amit jogukban áll elfogadni vagy nem elfogadni. Ha valaki a sajátját tartja a legjobbnak, akkor bármit is kínáljunk helyette, nem fogja elfogadni. Ezt általánosítja a következő fogalom. Egy $S \subseteq N$ halmazra legyen $A(S)$ azon elosztások halmaza, amelyben minden S-beli ember egy S-beli házát kapja meg. Vagyis $A(S) = \{z \in A : z_i \in S \ \forall i \in S\}$. Egy S halmazt az $\sigma \in A$ elosztásra nézve **blokkoló koalíciónak** nevezünk, hogyha létezik olyan $z \in A(S)$, hogy tetszőleges $i \in S$-re $z_i \succeq_i \sigma_i$, és legalább egyik helyen $z_i \succ_i \sigma_i$. Ez azt jelenti, hogy ha az S halmaz kilépne az elosztásból, akkor tudnának maguk közt egy olyan másikat csinálni, hogy mindenki legalább olyan jól járna, legalább egy valaki pedig szigorúan jobban. Azon elosztások halmazát, amelyekre nem létezik blokkoló koalíció, az újraelosztási feladat **magjának** nevezzük.

A **felső körcsere algoritmus** (top trading cycles, TTC) egy ilyen elosztást fog találni. Vegyük az N ponthalmazon azt a G_1 irányított gráfot, amelyben az i. pontból a j.-be akkor megy él, ha az i. játékos preferenciasorrendjében a legjobb ház a j. (Megengedünk hurokéleket is.) Ebben a gráfban minden pont kifoka pontosan 1, ezért biztosan tartalmaz legalább egy irányított kört (a hurkokat is irányított körnek tekintjük). Látható tovább, hogy ezek a körök diszjunktak. Legyen N_1 a körök ponthalmaza. Minden $i \in N_1$ ember kapja meg az őt tartalmazó körben a ki-szomszédjának a házát; az N_1-beliek tehát mind a nekik leginkább tetsző házat kapják meg.

Töröljük az N_1 ponthalmazt; az $N - N_1$ ponthalmazon húzzuk be az ij irányított élt, ha az i. játékos számára az $N - N_1$-beli házak közül a j. a legjobb. Legyen G_2 az így kapott gráf. Az előzőhöz hasonlóan, legyen N_2 ebben a gráfban az irányított körök halmaza, és kapja meg minden $i \in N_2$ játékos az őt tartalmazó körben a ki-szomszéd házát. Így tovább, a k. lépésben tekintsük az $N - \cup_{j<k} N_j$ ponthalmazon a legjobb házak által meghatározott G_k gráfot, és definiáljuk az N_k halmazt. Így végül N-t felosztjuk nemüres halmazok uniójára, és minden játékoshoz hozzárendelünk egy házat.

4.35. tétel (Shapley, Scarf, Gale, 1974)**.** *Az újraelosztási feladat magja pontosan egy elosztásból áll, abból, amelyiket a felső körcsere algoritmus megtalálja.*

Bizonyítás. Legyen σ az algoritmus által adott elosztás. Először belátjuk, hogy σ-n kívül más σ' elosztás nem lehet a magban. σ-ban az N_1-beli játékosok mind a számukra legjobb házat kapták.

Ha tehát σ'-ben egy $i \in N_1$ játékos másik házat kapna, akkor N_1 blokkoló koalíció lenne σ'-re nézve. Vagyis $\sigma'|_{N_1} = \sigma|_{N_1}$. N_2-ben minden játékos a legjobb olyan házat kapja, ami nem egy N_1-beli játékosé volt. Tehát – tudva, hogy σ' az N_1-beli házakat N_1-ben osztja szét – ugyanilyen érveléssel látszik, hogy $\sigma'|_{N_2} = s|_{N_2}$. Ezt az érvelést folytatva láthatjuk, hogy σ az egyetlen lehetséges elosztás a magban.

Be kell még látnunk, hogy σ tényleg a magban van, vagyis nem létezik σ-ra nézve blokkoló koalíció. Indirekten, legyen S egy minimális blokkoló koalíció, $z \in A(S)$ egy blokkoló elosztás. Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $S \cap N_k \neq \emptyset$. Legyen $C \subseteq N_k$ az egyik olyan N_k-beli kör, amire $C \cap S \neq = \emptyset$. Ha $C - S \neq \emptyset$, akkor léteznek olyan $i \in C \cap S$, $j \in C - S$ elemek, amelyekre ij egy él G_k-ban. Ekkor $\sigma(i) \succ_i z(i)$, hiszen $\sigma(i) = j$ és $j \succ_i j'$ tetszőleges $j' \in S$-re. Ez ellentmond annak, hogy S (és z) blokkolja σ-t.

Tehát $C \subseteq S$. Ugyanígy látszik azonban, hogy minden $i \in C$-re $\sigma(i) = z(i)$, vagyis ekkor $S - C$-nak is blokkoló koalíciónak kell lenni, ellentmondva S minimális választásának. □

A szokásos módon **taktikázásbiztosnak** nevezünk egy f elosztási mechanizmust, hogyha nem léteznek olyan $\pi = (\prec_1, \ldots, \prec_n) \in P^n$ preferenciák, hogy az i. játékos egy $\prec'_i$ preferenciájára és $\pi' = = (\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n)$, $\sigma = f(\pi)$ és $\sigma' = f(\pi')$ esetén $\sigma' \succ_i \sigma$. Vagyis az i. játékos nem tudja úgy megváltoztatni a preferenciáját, hogy az ezáltal módosított döntés értelmében jobb házhoz jusson.

4.36. tétel (Roth, 1982)**.** *A felső körcsere algoritmus taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Adott π preferenciák esetén módosítsuk az algoritmust úgy, hogy az i. játékosból kilépő éleket nem húzzuk be; a többi játékosból kilépő éleket a $\prec_j$ sorrendeknek megfelelően adjuk hozzá minden lépésben. Ekkor az algoritmus végére egy i gyökerű be-fenyőt kapunk (egy olyan fát, amelynek minden éle i felé van irányítva). Legyen K az ebben szereplő pontok halmaza. Világos, hogy akármilyen sorrendet használjon is az i. játékos, nem érheti el, hogy valamelyik $N - K$-beli játékos házát ossza neki az algoritmus. Vegyük észre, hogy a $\prec_i$ stratégiát választva az algoritmus szerint a $\prec_i$ sorrendben legjobb K-beli házat fogja megkapni; akárhogy is változtatja meg tehát a sorrendjét, ennél jobbat nem kaphat. □

Egyetlen játékos ezek szerint nem tud javítani a saját helyzetén, de vajon tud-e rontani a többiekén anélkül, hogy a sajátján rontana? Megmutatjuk, hogy ez sem lehetséges.

4.37. lemma. *Legyen π az eredeti preferencia-profil, és π' egy olyan preferencia-profil, ami csak a k-adik játékosnál tér el π-től. Ha a TTC π'-ben ugyanazt a házat adja a k-adik játékosnak, akkor minden játékosnak ugyanazt adja.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valaki más házat kap, és legyen az i-edik játékos az első, aki a π'-re futtatott algoritmus során más házat kap (j'), mint π-ben (j). Ha $j' \prec_i j$, akkor i korábban már egyszer bejelölte j-t, de egy j-t tartalmazó C kör miatt elutasították. Mivel i az első aki más házat kap, a C kört a π szerinti algoritmus is kiadja, de ez ellentmond annak, hogy a π szerinti algoritmus i-nek a j házat adja.

Ha $j' \succ_i j$, akkor Legyen C' az a kör, amiben i a j'-t kapja a π' szerinti algoritmusban. A C' körben mindenki legalább olyan jót kap, mint a π szerinti algoritmusban (hiszen előbb beláttuk, hogy rosszabbat nem kaphat), és i szigorúan jobbat kap. De így C' blokkoló kör lenne, ellentmondás. □

Egy elosztási mechanizmus **csoportos taktikázás biztos**, ha a játékosok egy részhalmaza se tud úgy hazudni a preferenciáiról, hogy ők legalább olyan jól járjanak, és egyikük szigorúan jobban. Bird belátta, hogy a felső körcsere algoritmus ezzel a tulajdonsággal is rendelkezik, sőt, ennél kicsit erősebbet is állíthatunk.

4.38. tétel (Bird, 1984)**.** *A felső körcsere algoritmus csoportos taktikázás biztos. Sőt, ha a játékosok egy U részhalmaza úgy hazudik hogy mindegyikük legalább olyan jól jár, akkor minden játékos ugyanazt kapja mint az eredeti preferenciái szerint.*

Bizonyítás. Legyen π a valódi és π' a módosított preferencia-profil, és legyen U a játékosoknak az a részhalmaza, akiknek más a preferenciája π'-ben mint π-ben. Tegyük fel indirekt, hogy a π-re futtatott

TTC-vel kapott σ és a π'-re futtatott TTC-vel kapott σ' permutáció nem ugyanaz, de minden U-beli játékos legalább olyan jól jár σ'-ben mint σ-ban.

Legyen az i-edik játékos az első, aki a π'-re futtatott algoritmus során más házat kap (j'), mint σ-ban (j) (ha több ilyen játékos van, akkor tetszőleges közülük). Ha $j' \prec_i j$, akkor $i \notin U$, hiszen az U beliek legalább olyan jót kapnak σ'-ben mint σ-ban. Ennek az esetnek a bizonyítása innen ugyanaz, mint a fenti lemmánál: i korábban már egyszer bejelölte j-t a π'-re futtatott algoritmus során, de egy j-t tartalmazó C kör miatt elutasították. Mivel i az első aki más házat kap, a C kör σ-ban is szerepel, de ez ellentmond annak, hogy $\sigma(i) = j$.

Tegyük most fel, hogy $j' \succ_i j$, és legyen C' az i, j'-t tartalmazó kör σ'-ben. Előbb beláttuk, hogy C'-ben senki sem kaphat rosszabb házat, mint σ-ban; viszont i szigorúan jobbat kap, tehát C' blokkoló kör σ-ra nézve, ami ellentmond a 4.35. Tételnek. □

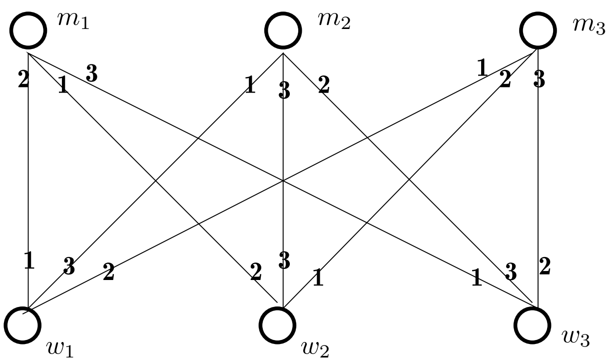
4.5. Stabil házasság

Egy házasságközvetítő irodát üzemeltetünk. n férfi és n nő keres nálunk párt; a beküldött anyagok alapján mindannyian kialakítottak a másik nemen egy preferenciasorrendet. A **stabil párosítási feladatban** ezen preferenciák alapján célunk n pár kialakítása úgy, hogy az mindenkinek a megelégedésére szolgáljon. Csupán javaslatokat tehetünk a párok kialakítására, amiket ők nem kötelesek elfogadni. Egy adott párosításra nézve egy m férfi és egy w nő **blokkoló párt** alkot, hogyha m párja a $w' \neq w$ nő, w párja az m' férfi, m-nek azonban jobban tetszik w mint w', w-nek pedig jobban tetszik m, mint m'. Vagyis ha m és w házasságot kötnének, mindketten jobban éreznék magukat, mint jelenlegi párjukkal. Egy párosítást **stabilnak** nevezünk, hogyha nincsen blokkoló pár.

Legyen M a férfiak, W a nők halmaza. Egy $a \in M \cup W$ ember rendezését a másik nemen $\prec_a$-val jelöljük: $x \succ_a y$ azt jelenti, hogy a-nak x jobban tetszik, mint y. Egy párosítást leírhatunk egy μ függvénnyel, ahol $a \in M \cup W$-re $\mu(a)$ az a párja.

Az újraelosztási feladathoz hasonlóan definiálhatjuk a párosítási feladat **magját**. Egy $S \subseteq M \cup W$ halmaz **blokkoló koalíció** a μ (nem feltétlenül stabil) teljes párosításra nézve, ha létezik olyan ν párosítás S-en, hogy minden $a \in S$ esetén $\nu(a) \in S$, és minden $a \in S$-re $\nu(a) \succeq_a \mu(a)$, és legalább egy helyen szigorú egyenlőtlenség áll. Vegyük észre, hogy egy blokkoló él egy kételemű blokkoló koalíció. Könnyen látható az alábbi állítás:

4.39. tétel. *A párosítási feladat magját pontosan a stabil párosítások alkotják.*



14. ábra

Tekintsük a 14. ábrán látható pédát. Itt az m_1w_1, m_2w_2, m_3w_3 párosítás nem stabil, mivel az m_1w_2 él blokkoló. Ezzel szemben m_1w_1, m_2w_3, m_3w_2 stabil párosítás. A továbbiakban stabil párosítások keresésével foglalkozunk.

Kicsit általánosabban beszélhetünk stabil párosításról egy tetszőleges $G = (M, W; E)$ páros gráfban. Itt nem tesszük fel, hogy $|M| = |W|$, és azt sem, hogy G teljes páros gráf; minden csúcsban adott egy preferenciasorrend a rá illeszkedő éleken. Egy (nem feltétlenül teljes) $F \subseteq E$ párosításra nézve mw blokkoló él, ha m vagy nem volt párosítva, vagy jobban tetszik neki w mint az F-beli párja, és ugyanez igaz w-re is. F stabil, ha nem létezik F-re nézve blokkoló él. Egy nem feltétlen teljes párosítást is leírhatunk egy $\mu : M \cup W \to M \cup W$ függvénnyel: legyen $\mu(a)$ az a párja, ha fedve a párosítás által, és legyen $\mu(a) = a$, ha fedetlen. A preferenciákat egészítsük ki úgy, hogy a preferenciasorrendjében saját maga is szerepel, a sorrend legvégén. Vagyis számára bármely G-beli szomszédjával párban lenni kedvezőbb, mint egyedül maradni. Ezzel a konvencióval mw pontosan akkor blokkoló él, hogy $\mu(m) \prec_m w$ és $\mu(w) \prec_w m$.

4.40. tétel (Gale, Shapely, 1962)**.** *Tetszőleges $G = (M, W, E)$ páros gráfban létezik stabil párosítás. Ha $|M| = |W| = n$, és G teljes páros gráf, akkor létezik teljes, vagyis n méretű stabil párosítás.*

Bizonyítás. Megadjuk a **leánykérő algoritmust**, amely mindig talál egy stabil párosítást. Először mindegyik fiú megkéri a neki legjobban tetsző lány kezét. Ha egy lány több ajánlatot is kap, megtartja (feltételesen) a legjobbat, a többit pedig kikosarazza. Minden következő lépésben minden szingli fiú megkéri a neki legjobban tetsző olyan lány kezét, akitől még nem kapott kosarat, és akivel össze van kötve G-ben. Aki már minden neki valamennyire is tetsző lánytól kosarat kapott, az nem próbálkozik többet.

Lássuk be, hogy az így kapott F párosítás stabil! Vegyünk egy tetszőleges $mw \in E$ élt a gráfban. Ha az algoritmus során m megkérte w kezét, akkor w-nek ezután mindig lesz párja, méghozzá vagy m, vagy egy nála jobban tetsző. Ha m nem kérte meg w kezét, az azért lehet, mert egy w-nél jobban tetsző lány lett a felesége. Mindkét esetben látható, hogy az mw él nem blokkolja a kapott párosítást, ami tehát stabil.

Az állítás második feléhez figyeljük meg, hogy egy stabil párosítás mindig tartalmazásra nézve maximális, hiszen ha lenne él két szingli közt, akkor ők inkább összejönnének. (Megjegyezzük, hogy azonban nem feltétlenül maximális elemszámúak a stabil párosítások.) □

A nemi szerepek felcserélésével beszélhetünk **legénykérő algoritmusról** is, amely szintén stabil párosítást ad.

4.41. feladat. Milyen párosítást ad a 14. ábrán a leány- illetve a legénykérő algoritmus?

Azt mondjuk, hogy a μ párosítás **dominálja a fiúk szempontjából** a ν párosítást, jelölve $\mu \trianglerighteq^M \nu$, ha minden $m \in M$ fiúra $\mu(m) \succeq_m \nu(m)$. Egy μ stabil párosítás **fiúoptimális**, ha minden ν stabil párosításra $\mu \trianglerighteq^M \nu$. Hasonlóan definiálhatjuk a dominálást lányok szempontjából ($\trianglerighteq^W$), illetve a lányoptimális stabil párosítást.

4.42. tétel. *A leánykérő algoritmus által adott μ stabil párosítás fiúoptimális, a legénykérő által adott pedig lányoptimális.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég belátni az elsőt. Tegyük fel indirekten, hogy létezik olyan ν párosítás és $m \in M$ fiú, hogy $\nu(m) \succ_m \mu(m)$. Ezért az algoritmus során kellett, hogy legyen olyan lépés, amikor valamelyik m fiú kosarat kap $\nu(m)$-től. Vegyük a legelső ilyen lépést; $w = \nu(m)$ azért kosarazta ki m-et, mert volt egy jobb kérője, m'. Mivel m szomorú esete a legelső ilyen, m' csak úgy kérhette meg w kezét, hogy $\nu(m')$-nél még nem próbálkozott, vagyis $\nu(m') \prec_{m'} w$. Következik az ellentmondás, mivel az $m'w$ él blokkolja ν-t. □

4.43. állítás (Knuth)**.** *A μ és ν stabil párosításokra $\mu \trianglerighteq^M \nu \;\Leftrightarrow\; \mu \trianglelefteq^W \nu$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy $\mu \triangleright^M \nu$, azonban valamely $w \in W$ lányra $m = \mu(w) \succ_w \nu(w)$. Mivel $\mu \triangleright^M \nu$ miatt $w = \mu(m) \succeq_m \nu(m)$, ezért mw blokkoló él ν-re nézve. □

Ennél több is belátható: a $\trianglelefteq^M$ részbenrendezésre nézve a stabil párosítások *hálót* alkotnak: bármely két elemnek van egyértelmű legkisebb közös felső illetve egyértelmű legnagyobb közös alsó korlátja.

4.44. állítás (Conway)**.** *A μ és ν stabil párosításokra definiáljuk azt a párosítást, hogy minden fiú a μ és ν szerinti párja közül a neki tetszőbbet választja. Ezáltal egy stabil párosítást kapunk.*

Bizonyítás. Be kell először látnunk, hogy így párosítást kapunk, vagyis minden lánynak legfeljebb egy párja lesz. Tegyük fel, hogy a w lányt két fiúhoz is hozzárendeljük: $\mu(m) = \nu(m') = w$ az m és m' fiúkra. w-nek egyikük jobban tetszik; a szimmetria miatt feltehetjük, hogy ez m. m-nek azért

w-t választottuk ki párként, mert jobban tetszett neki, mint $\nu(m)$. Ekkor következik, hogy az mw él blokkolja a ν stabil párosítást, ami ellentmondást ad.

A stabilitáshoz tegyük fel, hogy egy mw él blokkolja az így kapott λ párosítást. Ha $\lambda(m) = \nu(m)$ és $\lambda(w) = \nu(w)$ volna, akkor mw már ν-t is blokkolná; ugyanez a helyzet μ-vel. Feltehetjük tehát, hogy ezek különböző párosításokhoz tartoznak; a szimmetria miatt legyen $\lambda(m) = \mu(m)$ és $\lambda(w) = \nu(w)$. Ekkor λ definíciója miatt $\nu(m) \prec_m \mu(m)$, vagyis az mw él blokkolja ν-t is (és ugyanígy μ-t is). □

Az előző állításban definiált stabil párosítást jelöljük $\mu \vee \nu$-vel. Könnyen belátható, hogy a $\trianglelefteq^M$ részbenrendezésre nézve ez μ és ν legkisebb közös felső korlátja lesz. Hasonlóan definiálható egy olyan párosítás, amelyben minden lány a neki jobban tetsző fiút választja a kettő közül. Ezt $\mu \wedge \nu$-vel jelöljük, és ugyanúgy látható, hogy a legnagyobb közös alsó korlát lesz.

Noha egyes párosítások minden fiú szempontjából jobbak másoknál, a következő állításban belátjuk, hogy akinek tetszőleges stabil párosításban nem jut pár, annak semmelyik másikban sem jut.

4.45. állítás. *Legyen ν és μ két tetszőleges stabil párosítás. Ha egy $a \in M \cup W$ fiúnak vagy lánynak ν-ben nem jut pár, akkor μ-ben sem fog jutni.*

Bizonyítás. Tegyük fel a szimmetria miatt, hogy $a_1 = a$ fiú, és noha $\nu(a_1) = a_1$ (vagyis ν-ben nincs párja), $\mu(a_1) = b_1 \neq a_1$. Ha b_1-nek nem volna párja ν-ben, akkor az a_1b_1 él blokkolná ν-t (két magányos embert köt össze). Legyen $a_2 = \nu(b_1)$. Azt állítjuk, hogy $a_1 \prec_{b_1} a_2$. Valóban, $a_1 \succ_{b_1} a_2$ esetén a_1b_1 blokkoló él lenne ν-re nézve. Ekkor $b_1 = \nu(a_2) \prec_{a_2} \mu(a_2)$, különben b_1a_2 blokkolná μ-t. Ebből következik az is, hogy a_2 párosítva van μ-ben; legyen $b_2 = \mu(a_2)$. Az érvelést ugyanígy folytatva további $b_2, a_3, b_3, a_4, \ldots$ szereplőket azonosíthatunk. A ν és μ párosítások uniója egy olyan gráf, amelyben minden pont foka legfeljebb kettő. Ilyen módon ebben egy olyan sétát találunk, amelyben az első csúcs foka 1, és minden további csúcs foka 2. A fokszámok miatt ezen sétának végtelen hosszúnak kell lennie, ami ellentmondás. □

Egy stabil párosítás kereső mechanizmust akkor nevezünk **taktikázásbiztosnak**, ha egy embernek se éri meg hamis preferenciát megadni, bármit is adtak meg a többiek. Beszélhetünk arról is, hogy egy mechanizmus a **fiúk** (illetve a **lányok**) **részéről taktikázásbiztos**, amikor ezt csak a fiúkra vagy csak a lányokra követeljük meg. Erről belátható az alábbi.

4.46. tétel (Roth). *A leánykérő algoritmus a fiúk részéről taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Csak arra az esetre bizonyítjuk a tételt, amikor $|M| = |W|$ és G teljes páros gráf. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamelyik fiú – feltehetjük, hogy m_1 – sikeresen tud taktikázni. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan $\pi = (\prec_{m_1}, \prec_{m_2}, \ldots, \prec_{m_n}, \prec_{w_1}, \ldots, \prec_{w_n})$ preferenciák, és m_1-nek egy másik, $\prec'_{m_1}$ preferenciája, hogy ha μ jelöli a fiúoptimális stabil párosítást a π-re, μ' pedig a fiúoptimális stabil párosítást a $\pi' = (\prec'_{m_1}, \prec_{m_2}, \ldots, \prec_{m_n}, \prec_{w_1}, \ldots, \prec_{w_n})$-re, akkor $\mu(m_i) \prec_{m_i} \mu'(m_i)$, vagyis m_i jobban jár, ha a hamis $\prec'_{m_1}$ preferenciasorrendet adja meg. Jelöljük Alg(π)-vel illetve Alg(π')-vel a lánykérő algoritmust az eredeti π preferenciákkal, illetve a π' preferenciákkal elvégezve.

Azt állítjuk, hogy feltehető, hogy $\prec'_{m_1}$-ben $\mu'(m_1)$ a legjobb. Ugyanis ha nem, akkor $\mu'(m_1)$-t a legjobb helyre téve az így kapott rendezéssel m_1 szintén sikeresen manipulálna, hiszen μ' eszerint is stabil, tehát m_1 párja ekkor is $\mu'(m_1)$ lenne.

4.47. állítás. *Minden m_j fiúra teljesül, hogy $\mu'(m_j) \succeq_{m_j} \mu(m_j)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mu'(m_j) \prec_{m_j} \mu(m_j)$. Ez azt jelenti, hogy Alg(π') során m_j-t $\mu(m_j)$ valamikor elutasítja. Legyen j az az index, amire először történik ilyen. Mivel μ_{m_j} elutasítja m_j-t, ezért ajánlatot kapott valakitől, akitől Alg(π) során nem kap ajánlatot. De j választása miatt ez a fiú nem lehet m_k $k \neq 1$-re, másrészt m_1 sem, hiszen akkor $\mu(m_j) = \mu'(m_1)$ lenne és $m_1\mu(m_j)$ blokkoló él lenne μ-re. ◇

A fenti állítás következménye, hogy minden lánykérés, ami Alg(π') során megtörténik, az Alg(π) során is megtörténik. Emiatt nem m_1 az utolsó kérő Alg(π)-ben, hiszen az utoljára megkért lányt csak egy fiú kéri meg, ezért ugyanez a fiú kéri meg Alg(π') során is. Tegyük fel, hogy Alg(π) során m_1 a k-adik lépésben kéri meg utóljára egy lány kezét.

4.48. állítás. *Ha egy m_j fiú Alg(π) során a k-adik lépés után megkér egy lányt, akkor $\mu(m_j) = \mu'(m_j)$, és $\mu(m_1) = \mu'(m_1)$.*

Bizonyítás. Nevezzünk egy lánykérést beteljesülőnek, ha végül házaspárt alkot a pár. Indukcióval bizonyítunk, a beteljesülő lánykérések ideje szerint fordított sorrendben. Láttuk, hogy az Alg(π)-beli utolsó kérőnek ugyanaz a párja μ-ben és μ'-ben. Tegyük fel, hogy az m_q fiú az r-edik lépésben kéri meg $\mu(m_q)$ kezét és hogy az r. lépés utáni beteljesülő lánykérésekre igaz, hogy μ'-ben is párt alkotnak.

Legyen M' azon fiúk halmaza, akiknek $\mu(m_q)$ jobban tetszik, mint a saját μ-beli párjuk, vagyis, akiket $\mu(m_q)$ elutasít Alg(π) során. Ha $M' = \emptyset$, akkor $\mu(m_q)$-t nem kéri meg m_q-n kívül más Alg(π) során, így Alg(π') során se, tehát $\mu(m_q) = \mu'(m_q)$. Ha $M' \neq \emptyset$, akkor legyen m_u a $\mu(m_q)$-nak legjobban tetsző fiú M'-ben. Vagyis $\mu(m_q)$ valamikor elutasítja m_u-t m_q miatt, vagy az r-edik lépésben, vagy később. Tehát m_u az r-edik lépés után kéri meg a végső párját, így az indukciós feltevés miatt $\mu(m_u) = \mu'(m_u)$. Mivel $m_u \neq m_1$, ebből következik, hogy Alg(π')-ben m_u megkéri $\mu(m_q)$-t, aki visszautasítja. $\mu(m_q)$ kérői csak M'-beliek vagy m_q lehetnek, tehát m_q miatt utasítja vissza. Tehát $\mu'(m_q) = \mu(m_q)$. A bizonyítás $m_q = m_1$ esetén is működik. ◇

Ezzel beláttuk, hogy $\mu'(m_1) = \mu(m_1)$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát a tételt beláttuk. □

4.49. feladat. A 14. ábra segítségével mutassuk meg, hogy a lányok szempontjából a leánykérő algoritmus nem taktikázásbiztos: az egyik lány hamis preferenciák bevallásával jobb párt tudna szerezni magának.

4.50. tétel (Roth)**.** *A párosítási feladatnál nem létezik mindenki számára taktikázásbiztos mechanizmus.*

Bizonyítás. Nézzük azt a példát, ahol a preferenciasorrendek a következők (az első helyen a legjobban tetsző szerepel):

$$\begin{array}{llll@{\qquad\qquad}llll}
m_1: & w_2, & w_1, & w_3; & w_1: & m_1, & m_3, & m_2 \\
m_2: & w_1, & w_2, & w_3; & w_2: & m_3, & m_1, & m_2 \\
m_3: & w_1, & w_2, & w_3; & w_3: & m_1, & m_2, & m_3
\end{array}$$

Ellenőrizhető, hogy két stabil párosítás van, méghozzá a $\mu = \{m_1w_2, m_2w_3, m_3w_1\}$, ami a fiúoptimális és a $\nu = \{m_1w_1, m_2w_3, m_3w_2\}$, ami a lányoptimális.

Ha az m_1 fiú a w_2, w_3, w_1 sorrendre változtat, akkor a μ lesz az egyetlen stabil párosítás, így ha egy mechanizmus a ν-t adja, akkor m_1 sikeresen tud taktikázni.

Fordítva hasonlóan, ha a w_1 az m_1, m_2, m_3 sorrendet mondja, akkor az egyetlen stabil párosítás a ν lesz, így ha egy mechanizmus a μ-t adja, akkor w_1 tud sikeresen taktikázni. Tehát nem létezhet mindenki számára taktikázásbiztos mechanizmus. □

4.51. megjegyzés. Feltehető a kérdés, hogy a leánykérő algoritmus a fiúk részéről csoportos taktikázás biztos-e. A válasz az, hogy nem: egy fiú ugyan nem tudja hamis preferenciákkal elérni, hogy ő jobban járjon, de azt elérheti, hogy ő ugyanazt a lányt kapja és valaki más szigorúan jobban járjon (persze ilyenkor a kapott párosítás nem lesz stabil, hiszen stabil párosításban egy fiú se kaphat jobbat, mint a fiú-optimálisban). Tekintsük a következő sorrendeket (az első helyen a legjobban tetsző szerepel):

$$\begin{array}{llll@{\qquad\qquad}llll}
m_1: & w_2, & w_1, & w_3; & w_1: & m_1, & m_2, & m_3 \\
m_2: & w_2, & w_3, & w_1; & w_2: & m_3, & m_1, & m_2 \\
m_3: & w_3, & w_2, & w_1; & w_3: & m_2, & m_3, & m_1
\end{array}$$

A fiú-optimális párosítás $\{m_1w_1, m_2w_3, m_3w_2\}$. Ha azonban az m_1 fiú w_1, w_2, w_3 sorrendre változtat, akkor a leánykérő algoritmus az $\{m_1w_1, m_2w_2, m_3w_3\}$ párosítást adja. Ez m_1-nek ugyanolyan jó, m_2-nek és m_3-nak viszont jobb. Hárman összefogva tehát elérhetik, hogy ketten jól járjanak és a harmadik se járjon rosszul. Be lehet viszont bizonyítani, hogy egy koalíció tagjai nem tudnak úgy hamis sorrendeket mondani, hogy mindannyian jobban járjanak.

4.6. Felvételi ponthatárok

A stabil párosítások fontos és igen elterjedt alkalmazási területe az egyetemi felvételi rendszer. Minden diáknak van egy preferenciasorrendje azon szakokról, ahova felvételizni szeretne. Minden szakhoz adott egy keretszám, amit nem léphetnek túl. Adott továbbá minden szaknak egy preferenciasorrendje az oda jelentkező diákokon.[3] Legyen T a felvételizők halmaza, S pedig a szakoké. Az s szakon legyen q_s a keretszám. Nem minden diák jelentkezik minden szakra; legyen $(S, T; E)$ az a páros gráf, amelyben $st \in E$ akkor, ha t beadta jelentkezését az s szakra. Egy hozzárendelést – a stabil párosításokhoz hasonlóan - jellemezhetünk egy μ függvénnyel. μ minden diákhoz azt a szakot rendeli, ahova felvették, egy s szakhoz pedig $\mu(s)$ az oda felvett diákok *halmazát* adja meg.

4.6.1. Stabil hozzárendelés

Tegyük fel először, hogy a diákoknak is szigorú preferenciái vannak a szakokon, valamint a szakoknak is az oda jelentkezőkön. Egy $st \in E$ él **blokkol** egy hozzárendelést, ha t-t nem vették fel s-re, noha t szívesebben jött volna ide, mint ahova végül felvették, másrészt pedig s vagy nem töltötte be a keretét, vagy felvettek egy olyan diákot, aki t mögött volt a sorrendben. (Formálisan: $s \prec_t \mu(s)$, és vagy $|\mu(s)| < q(s)$, vagy létezik egy $t' \in \mu(s)$ diák, akire $t' \prec_s t$.) Stabil a hozzárendelés, ha nincs blokkoló él.

A leánykérő algoritmus apró módosításával találhatunk stabil hozzárendelést: először minden s szak felvételi ajánlatot tesz a sorrendben legelső q_s diáknak. Ha egy diák több ajánlatot is kap, a legjobbat elfogadja, a többit visszautasítja. Ha a visszautasítások miatt egy szakon üres helyek keletkeznek, újra ajánlatot tesznek a sorrendben következő annyi diáknak, akivel fel tudják tölteni a létszámot (feltéve, hogy van még ennyi jelentkező). Ha egy diák már visszautasította egy szak ajánlatát, akkor az a szak többet nem tesz neki ajánlatot. Így végül egy stabil hozzárendelést kapunk. A stabil házassághoz hasonlóan belátható, hogy ez az egyetemek szempontjából lesz a lehető legjobb. Ugyanúgy csinálhatunk egy másik algoritmust is, amelyben a diákok jelentkeznek a kedvenc szakjukra, az s szak pedig elutasítja azokat a jelentkezőket, akik nincsenek benne a legjobb q_s-ben. Ez a diákok szempontjából lesz optimális.

A stabil hozzárendelési feladatot visszavezethetjük stabil párosítás keresésére. Minden s szakot helyettesítsünk q_s darab új ponttal: (s, i) az s szakra i. helyen felvett diákot reprezentálja. Minden (s, i) pont örökölje az s preferenciáit. Egy t diák preferenciáit adjuk meg úgy, hogy $(s, i) \prec_t (s', i')$, ha eredetileg $s \prec_t s'$, vagy pedig $s = s'$ és $i' < i$. Könnyen belátható az alábbi állítás.

4.52. állítás. *A fenti konstrukcióban egy stabil párosítás az eredeti feladatban egy stabil hozzárendelést ad. Megfordítva, minden stabil hozzárendeléshez megadhatunk egy stabil párosítást, ahol az s szakra felvett k diákot az $(s,1), (s,2), \ldots, (s, k)$ pontokhoz osztunk be, az s preferenciái szerint csökkenő sorrendben.*

Ennek segítségével a 4.45. állításból levezethető az alábbi, talán meglepő eredmény.

4.53. tétel (Vidéki főiskola tétel). *Legyen μ és ν tetszőleges stabil hozzárendelések. Ha ν-ben valamely s szak nem tudta feltölteni a keretét, vagyis $|\nu(s)| < q(s)$, akkor semmelyik másik stabil hozzárendelésben sem tudta; ráadásul éppen ugyanazokat a diákokat veszik fel mindig, vagyis $\mu(s) = \nu(s)$.*

Bizonyítás. Tekintsük az előző állításban tárgyalt konstrukciót! A 4.45. állítás szerint ugyanazok az (s, i) párok maradnak minden stabil párosításban fedetlenek. Ebből már következik, hogy tetszőleges két stabil hozzárendelésben $|\mu(s)| = |\nu(s)|$.

Legyen most μ a diák-optimális hozzárendelés (amit azzal a „szakkérő” algoritmussal kapunk, ahol a diákok tesznek ajánlatot az egyetemeknek.) Belátjuk, hogy tetszőleges $t \in \mu(s)$-re következik $t \in \in \nu(s)$. A halmazok elemszámának azonossága miatt ebből rögtön adódik, hogy mindegyik halmaz azonos. A diák-optimalitás miatt $\nu(t) \preceq_t \mu(t)$. Ha tehát $\nu(t) \neq s$, akkor $\nu(t) \prec_t \mu(t)$. Ekkor st blokkolja ν-t, mivel $|\nu(s)| < q(s)$. ☐

[3] Egy korábbi hasonló alkalmazás a rezidens-elhelyezési feladat: a frissen végzett orvosok különböző kórházakba pályázhatnak rezidensi állásokra.

4.6.2. Ponthatárhúzás

A magyar felvételi rendszerben 1985 óta alkalmaznak stabil párosítási algoritmusokat. Az előző modellhez képest fontos eltérés, hogy a szakoknak nincs teljes rendezése a jelentkezőkön: minden jelentkező minden szakon egy pozitív egész pontszámot kap, maximum D-t (jelenleg $D = 500$). Legyen r_{st} az t diák pontszáma az s szakon (feltéve hogy $st \in E$). Az azonos pontszámot elért diákok között azonban nem lehet diszkriminálni: a felvételi úgy működik, hogy minden s szakon meghúznak egy ℓ_s ponthatárt. A t diák **felvehető** az s szakra, ha $st \in E$ és $r_{st} \geq \ell_s$. Egy hozzárendelésben minden diákot a preferenciasorrendjében szereplő első olyan szakra kell felvenni, ahova felvehető.

Az $\ell = (\ell_s)_{s\in S}$ vektort **ponthatárhúzásnak** nevezzük. Egy ponthatárhúzás egyértelműen meghatározza a diákok hozzárendelését a szakokhoz: minden diák a számára legjobb olyan szakra megy, ahol eléri a ponthatárt. Jelölje $\mu(\ell)$ ezt a hozzárendelést. Egy ponthatárhúzás akkor **megengedett**, ha minden $s \in S$-re $d_{\mu(\ell)}(s) \leq q_s$, vagyis sehol nem lépik át a kvótát. Egy megengedett ponthatárhúzás **stabil**, ha minden s szakra, amire $\ell_s > 0$, igaz a következő: ha eggyel csökkentenénk s ponthatárát a többi ponthatár változtatása nélkül, akkor már több mint q_s olyan diák lenne, aki az s szakra felvehető, és az őt felvevő szakok közül s-t preferálja.

Célunk egy stabil ponthatárhúzás meghatározása. A leánykérő algoritmus szellemét követve induljunk onnan, hogy mindegyik ponthatár $\ell_s = D + 1$, vagyis senkit sem vesznek fel sehova; ez megengedett, de (általában) nem stabil. Minden lépésben egyszerre fogjuk az összes ponthatárt módosítani. A ponthatárok mindig csökkennek, ezért ezt az algoritmust **ponthatár-csökkentő algoritmus**nak nevezzük. Az algoritmus végén kapott ponthatárokat jelölje $\ell^{\downarrow}$.

Egy adott lépésben legyenek ℓ_s ($s \in S$) a ponthatárok. Minden s-re és $0 \leq z \leq \ell_s$ egészre legyen $\ell(s, z)$ az a ponthatárhúzás, ahol ℓ_s-t lecseréljük z-re, a többit pedig nem változtatjuk. Legyen az új ℓ_s a legkisebb olyan nemnegatív z érték, amelyre $\mu(\ell(s, z))$-ben s foka legfeljebb q_s. Világos, hogy minden lépésben az új ℓ_s ponthatárok is megengedett ponthatárhúzást adnak. Az algoritmus akkor ér véget, ha valamelyik lépésben egyik ponthatár sem változik. Ez azzal ekvivalens, hogy minden s-re, amire $\ell_s > 0$, $\mu(\ell(s, \ell_s - 1))$-ben s foka nagyobb mint q_s, ami épp a stabilitást mutatja. Az algoritmus $D|S|$ lépésen belül véget ér, hiszen minden lépésben legalább egy szak legalább eggyel csökkenti a ponthatárát.

Ettől különböző, **ponthatár-növelő** algoritmust kapunk, ha a diákok „kérik meg" a szakokat. Induljunk ki az azonosan 0 ponthatárokból. Minden diák jelentkezik a kedvenc szakjára, ahova felvehető. Ezután minden szak felemeli a ponthatárát a legkisebb olyan értékre, ahol a jelentkezett felvehető diákok száma már legfeljebb a kvóta. Azok a diákok, akik már nem felvehetőek a szakra ahova jelentkeztek, újra jelentkeznek az aktuális kedvenc felvehető szakra. Az algoritmus akkor áll le, ha egy szak sem emeli a ponthatárt.

Belátjuk, hogy az így kapott $\ell^{\uparrow}$ ponthatárhúzás stabil. Nézzünk egy s szakot, és legyen ℓ' az a ponthatárhúzás, ami után az s szak ponthatárát felemeltük $\ell^{\uparrow}_s$-ra. Mivel nem $\ell^{\uparrow}_s - 1$-re emeltük, $\mu(\ell'(s, \ell^{\uparrow}_s - 1))$-ben s foka nagyobb mint q_s. De $\ell' \leq \ell^{\uparrow}$, tehát s foka $\mu(\ell^{\uparrow}(s, \ell^{\uparrow}_s - 1))$-ben is nagyobb mint q_s. Ez mutatja a stabilitást.

4.54. tétel. *Ha ℓ^* stabil ponthatárhúzás, akkor $\ell^{\uparrow}_s \leq \ell^*_s \leq \ell^{\downarrow}_s$ minden $s \in S$-re.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\ell^{\uparrow} \not\leq \ell^*$, és nézzük a ponthatár-növelő algoritmusnak azt a lépését, ahol először emeljük valamelyik s szak ponthatárát ℓ^*_s fölé. Legyen ℓ a növelés előtti és ℓ' a növelés utáni ponthatárhúzás. Mivel $\mu(\ell(s, \ell'_s - 1))$-ben s foka nagyobb mint q_s, $\mu(\ell(s, \ell^*_s))$-ban is nagyobb. De $\ell \leq \ell^*$ miatt így $\mu(\ell^*)$-ban is nagyobb a fok q_s-nél, ami ellentmond ℓ^* megengedettségének.

Tegyük fel most indirekt, hogy $\ell^* \not\leq \ell^{\downarrow}$, és nézzük a ponthatár-csökkentő algoritmusnak azt a lépését, ahol először csökkentjük valamelyik s szak ponthatárát egy ℓ^*_s alá. Legyen ℓ a csökkentés előtti és ℓ' a csökkentés utáni ponthatárhúzás. Mivel $\mu(\ell(s, \ell'_s))$-ben s foka legfeljebb q_s, és $\ell^* \leq \ell$, ezért s foka $\mu(\ell^*(s, \ell'_s))$-ben is legfeljebb q_s. De ez ellentmond annak, hogy ℓ^* stabil, hiszen $\ell'_s < \ell^*_s$. □

4.55. megjegyzés. Szigorú rendezések esetén igaz volt, hogy minden stabil hozzárendelésben ugyanaz a sehova sem felvett diákok halmaza. Megmutatjuk, hogy ponthatárhúzásnál ez nem igaz. Tekintsünk egy példát, ahol két szak van, mindkettő kvótája 50, és van összesen 100 felvételiző. A t_1 diák pontszáma a két szakon 95 és 80, és a második szakot preferálja. A t_2 diák pontszámai pedig 90 és 85, és az első szakot preferálja. Van még 49 diák, aki csak az első szakra jelentkezik, ebből 4-nek a pontszáma 90, a többinek több mint 90. A maradék 49 diák csak a második szakra jelentkezik, 9-nek 80 pontja van itt, a többinek több mint 80.

A ponthatár-csökkentő algoritmus első lépésben lecsökkenti az első szak ponthatárát 91-re, a másodikét pedig 81-re. Az algoritmus itt le is áll, hiszen ha a második lépésben az első ponthatárt 90-re csökkentenénk, már 51-en jelentkeznének az első szakra, és ugyanígy, ha a második ponthatárt 80-ra csökkentenénk, 51-en jelentkeznének oda. Az első szakra így 46 diákot veszünk fel, köztük t_1-et, a második szakra pedig 41-et, köztük t_2-t.

Nézzük most a ponthatár-növelő algoritmust. A kiinduló 0 ponthatároknál mindkét szakra 50 diák jelentkezik, tehát nem is növeljük a ponthatárokat, az algoritmus egyből leáll. Mindkét szakra 50 diákot veszünk fel, t_1-et a másodikra, t_2-t pedig az elsőre. Ebben a példában tehát a ponthatár-növelő algoritmus által adott stabil hozzárendelésben szigorúan több diákot veszünk fel mindkét szakra, ráadásul t_1 és t_2 is a kedvenc szakjára kerül, míg ponthatár-csökkentés esetén a kevésbé preferált szakjára.

4.56. megjegyzés. A ponthatárhúzásnál Roth 4.46. tételének megfelelője sem igaz: a ponthatár-növelő algoritmus nem taktikázásbiztos a diákok számára; sőt, nem is létezik a diákok számára taktikázásbiztos algoritmust. Tekintsük a következő példát 2 diákkal és 3 szakkal: t_1 és t_2 preferencia-sorrendje egyaránt $s_1 \succ s_2 \succ s_3$. Mindhárom szak kvótája 1, és a diákok pontszámai a szakok sorrendjében: t_1 : 0,1,1; t_2 : 0,0,1.

A ponthatár-növelő algoritmus első lépésében s_1 felemeli 1-re a ponthatárt, hiszen mindkét diák oda jelentkezik, de a kvótája 1. Ezután a két diák s_2-re jelentkezik, így ott is 1-re emelkedik a ponthatár. A kapott hozzárendelésben t_1 az s_2 szakra, t_2 az s_3 szakra kerül. Az is könnyen belátható, hogy a ponthatárcsökkentő algoritmus is az (1,1,0) ponthatárt adja, így ez az egyetlen stabil ponthatár-húzás.

Most nézzük, mit ad az algoritmus, ha t_2 a valódi preferenciái helyett $s_2 \succ s_1 \succ s_3$ preferenciákat ad meg. Az első körben t_1 az s_1 szakra, t_2 az s_2 szakra jelentkezik, és ez bele is fér a kvótákba, úgyhogy az algoritmus leáll, a kapott hozzárendelésben t_1 az s_1 szakra, t_2 az s_2 szakra kerül. Így mindketten jobban járnak, mint a valódi preferenciák szerint. Sőt, a ponthatárcsökkentő algoritmus is a (0,0,0) ponthatárokat adja, így bármilyen algoritmust használunk, ezt a ponthatár-húzást kapjuk.

A következőkben belátjuk, hogy ha egyik szakon sincs pontegyenlőség, akkor a ponthatár-növelő algoritmus taktikázásbiztos. Ehhez először egy egyszerű lemmát bizonyítunk két ponthatárhúzás viszonyáról.

4.57. lemma. *Legyen ℓ és ℓ' két ponthatárhúzás, és s, u két különböző szak, amire $\ell_s \geq \ell'_s$ és $\ell_u \leq \ell'_u$. Ha $\mu(\ell)$-ben egy t diák az s szakra kerül, akkor $\mu(\ell')$-ben nem kerülhet az u szakra.*

Bizonyítás. Nézzük először azt az esetet, amikor $s \succ_t u$. Mivel $\mu(\ell)$-ben t az s szakra kerül, $r_{st} \geq \ell_s \geq \ell'_s$. Tehát t eléri az ℓ'_s ponthatárt, így nem lehet u a legjobb szak, ahol ℓ' szerint eléri a ponthatárt.

A másik esetben $s \prec_t u$. Mivel $\mu(\ell)$-ben t az s szakra kerül, az s a legjobb szak, ahol ℓ szerint eléri a ponthatárt, így az u szakon nem éri el. Azaz $r_{st} < \ell_s \leq \ell'_s$, így t nem kerülhet $\mu(\ell')$-ben az u szakra. □

4.58. tétel. *Ha egyik szakon sincsenek azonos pontszámú hallgatók, a ponthatár-növelő algoritmus a hallgatók számára taktikázásbiztos.*

Bizonyítás. Legyen t^* az a diák, aki módosított preferenciát ad meg. Legyen $\ell^{\uparrow}$ a ponthatár-növelő algoritmus eredménye az igazi preferenciákra, ℓ^* pedig a módosított preferenciákra. Jelölje μ^* a módosított preferenciákra kapott hozzárendelést. Tekintsük a ponthatár-növelő algoritmust az igazi preferenciákra.

4.59. állítás. *Az algoritmus egy pontján legyen ℓ az aktuális ponthatárvektor, $\mu := \mu(\ell)$ az aktuális hozzárendelés, és Z azon s szakok halmaza, amikre $\ell_s > \ell^*_s$. Ekkor minden $s \in Z$-re $|\mu(s)| \geq q_s$, $|\mu^*(s)| = q_s$, $\mu^*(t^*) \notin Z$, és*

$$\{t \in T : \mu(t) \in Z\} \subseteq \{t \in T : \mu^*(t) \in Z\} \cup \{t^*\}.$$

Bizonyítás. Az algoritmus elején $Z = \emptyset$, így triviálisan igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az algoritmus egy lépése előtti ℓ ponthatárhúzásra igaz az állítás; belátjuk, hogy a lépés utáni ℓ' ponthatárhúzásra, μ' hozzárendelésre és $Z' = \{s \in S : \ell'_s > \ell^*_s\}$ halmazra is igaz. Az állítás miatt legfeljebb egy olyan $s \in Z$ van, ami emeli a ponthatárát, hiszen $\sum_{s\in Z} |\mu(s)| \leq 1 + \sum_{s\in Z} |\mu^*(s)| = 1 + \sum_{s\in Z} q_s$.

1. eset: van egy $s \in Z$, ami emeli a ponthatárát. Ekkor $|\mu(s)| = q_s + 1$, és mivel nincsenek azonos pontszámok, $|\mu'(s)| \geq q_s$. Tegyük fel, hogy egy $s' \in S \setminus Z$ szakra $\ell'_{s'} > \ell^*_{s'}$. Az állítás szerint $\{t \in \in T : \mu(t) \in Z\} = \{t \in T : \mu^*(t) \in Z\} \cup \{t^*\}$. Ez azt jelenti, hogy aki az $\ell(s', \ell'_{s'} - 1)$ ponthatároknál s'-re kerül, az μ^*-ban is oda kerül, hiszen nem kerülhet más $S \setminus Z$-beli szakra (használjuk a 4.57. lemmát az $\ell(s', \ell'_{s'} - 1)$ és ℓ^* ponthatárhúzásokra, valamint s'-re és egy másik $S \setminus Z$-beli szakra). Ez ellentmond annak, hogy az $\ell(s', \ell'_{s'} - 1)$ ponthatároknál több mint $q_{s'}$ diák kerül s'-re. Megállapíthatjuk tehát, hogy $Z' = Z$, és $\mu(t) \notin Z$ esetén $\mu'(t) \notin Z$, hiszen t jobban szereti $\mu^*(t)$-t azoknál a Z-belieknél, amiknek eléri a ponthatárát (itt $t \neq t^*$, hiszen $\mu(t^*) \in Z$). Így ℓ'-re is teljesül az állítás.

2. eset: nincs olyan $s \in Z$, ami emeli a ponthatárát. Tegyük fel, hogy egy $s' \in S \setminus Z$ szakra $\ell'_{s'} > \ell^*_{s'}$. Kell lenni egy t' diáknak, aki az $\ell(s', \ell'_{s'} - 1)$ ponthatároknál s'-re kerül, μ^*-ban viszont nem. Ekkor vagy $t' = t^*$, vagy $\mu^*(t') \in Z$, hiszen ellenkező esetben az $\ell(s', \ell'_{s'} - 1)$ ponthatároknál is legalább olyan jó szakra kerülne, mint $\mu^*(t')$, s' viszont rosszabb számára. Az állítás miatt ez csak úgy lehet, ha

$$(\{t \in T : \mu^*(t) \in Z\} \cup \{t^*\}) \setminus \{t \in T : \mu(t) \in Z\} = \{t'\}.$$

Következésképp csak ezen az egy szakon emelkedhet ℓ^* fölé a ponthatár, azaz $Z' = Z \cup \{s'\}$. Ráadásul az $\ell(s', \ell'_{s'} - 1)$ ponthatárhúzásnál s'-re ugyanazok kerülnek, mint μ^*-ban, plusz még a t' diák.

Ebből láthatjuk, hogy $\mu^*(t^*) \neq s'$, hiszen vagy $t' = t^*$, vagy $\mu(t^*) \in Z$, tehát az $\ell(s', \ell'_{s'} - 1)$ ponthatároknál t^* nem kerül s'-re. Az első esethez hasonlóan az is igaz, hogy $\mu(t) \notin Z'$ esetén $\mu'(t) \notin Z'$, hiszen t $\mu^*(t)$-t jobban szereti azoknál a Z'-belieknél, amiknek eléri a ponthatárát (vegyük észre, hogy itt $t \neq t^*$, hiszen $\mu(t^*) \in Z'$). Így ℓ'-re is teljesül az állítás. □

Az állításból könnyen következik a tétel. Ugyanis az állítás szerint az algoritmus végén is teljesül, hogy $\mu^*(t^*) \notin Z$, azaz μ^*-ban t^* nem kerülhet olyan s szakra, amire $\ell^\uparrow_s > \ell^*_s$. Így olyan szakra kerül, ahova az $\ell^\uparrow$ ponthatárok szerint is felvennék, márpedig $\mu(\ell^\uparrow)$-ban t^* a számára legjobb ilyen szakra kerül. □

4.60. megjegyzés. A vidéki főiskola tételt (4.53. Tétel) a ponthatár-húzások segítségével is könnyű belátni. Feltesszük, hogy egyik szakon sincs pontegyenlőség. Figyeljük meg, hogy ha ℓ stabil és $\mu(\ell)$-ben egy s szak nem tölti ki a kvótáját, akkor $\ell_s = 0$, hiszen 1-gyel való csökkentésnél legfeljebb 1-gyel nőhet a felvettek száma. Mivel $\ell^\uparrow \leq \ell$, szükségképp $\ell^\uparrow_s = 0$, és akit $\mu(\ell^\uparrow)$-ban s-re veszünk fel, azt $\mu(\ell)$-ben is. Így minden olyan szakra, ami $\mu(\ell)$-ben nem tölti be a kvótáját, $\mu(\ell^\uparrow)$-ban legfeljebb azokat a diákokat vesszük fel, akiket $\mu(\ell)$-ben is. De másrészt a sehova fel nem vett diákok halmaza $\mu(\ell^\uparrow)$-ban a legkisebb, hiszen ott a legalacsonyabbak a ponthatárok. Ez csak úgy lehet, ha $\mu(\ell)$-ben a sehova fel nem vett diákok ugyanazok, mint $\mu(\ell^\uparrow)$-ban, és minden olyan szakra, ami nem éri el a kvótáját, pontosan ugyanazokat a diákokat vesszük fel $\mu(\ell)$-ben mint $\mu(\ell^\uparrow)$-ban.

5. Kifizetéses kooperatív játékok

Az előző fejezetekben szereplő újraelosztási és stabil párosítási feladatokban nem vettük figyelembe, hogy egy koalícióban esetleg érdemes lehet kifizetésekkel kárpótolni azokat a játékosokat, akik rosszabbul járnak, hiszen így meggyőzhetjük őket, hogy vegyenek részt a koalícióban. Ebben a fejezetben egy általános modellt tekintünk olyan kooperatív játékok leírására, ahol a haszon újraosztható a koalíció résztvevői között. Ehhez persze szükséges a haszon számszerűsítése, tehát nem elég preferencia-sorrendeket nézni.

Az általános modellben adott n játékos, és egy $v : 2^n \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény, ami minden koalícióhoz hozzárendeli a koalíció által elérhető maximális hasznot; ez a koalíció **értéke**. A v a játék **értékfüggvénye**. Egy $z \in \mathbb{R}^n$ vektor **érvényes kifizetés**, ha $\sum_{i=1}^n z_i = v([n])$.

Példa: párosítás játék ♦ Nézzük azt a játékot, ahol a játékosok egy $G = (V, E)$ gráf csúcsai, adottak w_e élsúlyok minden élre, és egy $U \subseteq V$ koalíció értéke a $G[U]$-beli maximális súlyú párosítás súlya:

$$v(U) = \max\{w(M) : M \text{ párosítás } G[U]\text{-ban}\}.$$

Egy érvényes kifizetés egy olyan $z \in \mathbb{R}^V$ vektor, amire $\sum_{u \in V} z_u$ egyenlő a G-beli maximális súlyú párosítás súlyával. Milyen egyéb tulajdonságokat szeretnénk megkövetelni a kifizetésről? Nyilván nemnegatívnak kellene lennie, hiszen különben a negatív kifizetést kapó játékos jobban jár ha kiszáll (ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $z_u \geq v(\{u\})$ minden u csúcsra). Jó lenne azt is teljesíteni, hogy $z_u + z_v \geq w_{uv}$ minden $uv \in E$ élre, hiszen különben ez a két játékos jobban jár ha különválik a többiektől és együtt w_{uv} hasznot elér.

Általában nem feltétlenül létezik ezeket kielégítő kifizetés. Például ha G egy háromszög és minden súly 1, akkor a maximális párosítás súlya 1, tehát ezt kellene szétosztani, de úgy, hogy minden pár is legalább 1-et kapjon együtt, ami lehetetlen. Ha G páros gráf, akkor viszont mindig van ilyen kifizetés! Hogy ezt belássuk, tekintsük a maximális súlyú párosítás probléma LP relaxáltját, és annak duálisát:

$$\max \sum_{e \in E} w_e x_e \qquad\qquad \min \sum_{u \in V} z_u$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad z \geq 0$$

$$\sum_{v : uv \in E} x_{uv} \leq 1 \ \forall u \in V \qquad\qquad z_u + z_v \geq w_{uv} \ \forall uv \in E$$

A primál és a duál optimumérték megegyezik. Páros gráf esetén a primál optimumérték pont a maximális súlyú párosítás súlya, tehát ezt kell szétosztani. Viszont az optimális duális megoldás pont egy olyan szétosztás lesz, ami teljesíti a fenti feltételeket!

Látszólag még erősebb feltétel, ha azt követeljük meg a z kifizetésről, hogy $z(U) \geq v(U)$ minden $U \subseteq V$ koalícióra. Azonban ebben a párosítási játékban könnyen belátható, hogy az élekre vonatkozó feltétel implikálja ezt a feltételt is, hiszen $G[U]$ maximális súlyú párosításának minden élére igaz, hogy a két végpont együtt legalább annyit kap, mint az él súlya, tehát összesen legalább annyit kapnak, mint a párosítás súlya. Általános játékokban viszont ezt az erősebb definíciót fogjuk használni.

5.1. A játék magja (core)

5.1. definíció. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ kifizetés-vektor a játék **magjában** van, ha érvényes, és minden $S \subseteq [n]$ koalícióra

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

Később látjuk majd, hogy nem csak a mag-beli kifizetés-vektorokat érdemes vizsgálni, de először mutatunk két játékot, ahol könnyen található mag-beli vektor.

Owen-féle termelési játék

Adott n termelő (a játékosok), m erőforrás, és k termék. Az i-edik erőforrásból a j-edik játékosnak b_{ij} áll rendelkezésére. Az l-edik termékből egységnyi előállításához az i-edik erőforrásból a_{il}-re van szükség. Az l-edik termék értékesítési egységára c_l.

Egy koalíció értékét az adja, hogy az erőforrásaikat összeadva maximum milyen bevételt tudnak elérni. Ez a következő lineáris programozási feladattal írható le:

$$v(S) = \max\left\{\sum_{l=1}^{k} c_l x_l : x \geq 0,\ \sum_{l=1}^{k} a_{il} x_l \leq \sum_{j \in S} b_{ij}\ \forall i \in [m]\right\}.$$

Az S koalícióra vonatkozó feladat duálisa a következő alakú:

$$(D_S) \qquad \min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j \in S} b_{ij} y_i : y \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} a_{il} y_i \geq c_l\ \forall l \in [k]\right\}.$$

Legyen y^* a $(D_{[n]})$ feladat egy optimális megoldása, és legyen $z_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^*$. Megjegyezzük, hogy a duális feladatnak és a z vektornak van egy szemléletes jelentése is. A duális feladat tekinthető úgy, hogy egy külső cég fel akarja vásárolni az összes játékos erőforrás-készleteit, és visszautasíthatatlan ajánlatot akar tenni az erőforrások árára. Ennek az a feltétele, hogy minden termékben a nyersanyagok össz-ára legalább annyi legyen, amennyiért azt a terméket el lehet adni, így a játékosoknak megéri termelés helyett eladni a külső cégnek az erőforrásaikat. Az optimális duális megoldás pedig a lehető legkisebb visszautasíthatatlan ajánlat. Ebben az értelmezésben z_j pedig az az összeg, amit az ajánlattevő a j-edik játékosnak fizet.

5.2. tétel (Owen)**.** *A z vektor benne van a játék magjában.*

Bizonyítás. Az erős dualitás tételből következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_i^* = v([n]),$$

tehát z érvényes kifizetés. Masrészt tetszőleges S koalícióra y^* megengedett megoldása a D_S feladatnak, így a gyenge dualitás tétel értelmében

$$v(S) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j \in S} b_{ij} y_i^* = \sum_{j \in S}\sum_{i=1}^{m} b_{ij} y_i^* = \sum_{j \in S} z_j,$$

azaz z a magban van. □

5.3. megjegyzés. Mivel a lineáris programozási feladat megoldható polinom időben, ebben a játékban polinom időben tudunk egy mag-beli kifizetés-vektort találni.

Minimális feszítő fa játék

Egy régióban új erőmű épül, és a régió települései között összeköttetéseket kell építeni úgy, hogy mindenki csatlakozzon a hálózathoz. Ez modellezhető minimális költségű feszítő fa problémaként: adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, egy $c \in \mathbb{R}^E$ élköltség-vektor, és egy kijelölt $r \in V$ gyökér, ami az erőműnek felel meg. A legjobb megoldás egy minimális költségű feszítő fa, ennek keresésére ismerük gyors algoritmusokat (Prim, Kruskal). Most azonban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy az építés költségét a települések hogyan osszák meg egymás között.

Ha településeknek egy $S \subseteq V - r$ részhalmazának túl sokat kell kifizetnie, fennáll a veszély, hogy inkább külön projektben, saját maguk építik meg az összeköttetésüket, azaz az $S + r$ csúcshalmazon építenek egy feszítő fát. Egy $U \subseteq V$ csúcshalmazra legyen OPT_U a minimális feszítő fa költség az U által feszített részgráfon. A feladat által meghatározott kooperatív játékban a játékosok halmaza $V - r$, az S koalíció értéke pedig

$$v(S) = -\mathrm{OPT}_{S+r},$$

hiszen a költség tekinthető negatív haszonnak. Hogy ne kelljen ellentettet venni, inkább haszon helyett költségeket nézünk, azaz a magban az

$$\{x \in \mathbb{R}^{V-r} : x(V-r) = \mathrm{OPT}_V,\ x(S) \le \mathrm{OPT}_{S+r}\ \forall S \subseteq V-r\}$$

vektorok vannak.

Bird megmutatta, hogy ebben a játékban is könnyű mag-beli vektort találni. Egy T feszítő fára és $v \in V-r$ csúcsra jelölje $e(v,T)$ a fában a v-ből r-be vezető egyértelmű útnak az első élét.

5.4. tétel (Bird)**.** *Legyen T^* egy tetszőleges minimális költségű feszítő fája G-nek. Ekkor a $z_v = c_{e(v,T^*)}$ $(v \in V-r)$ vektor a játék magjában van.*

Bizonyítás. Mivel T^* minden éle pontosan egy $v \in V-r$ csúcsra egyenlő $e(v,T^*)$-gal, z teljesíti a $z(V-r) = c(T^*) = \mathrm{OPT}_V$ feltételt. Legyen most $S \subseteq V-r$ egy tetszőleges koalíció, és T_S egy minimális költségű feszítő fa az $S+r$ által feszített részgráfon. Tegyük fel indirekt, hogy $c(T_S) < z(S)$. Legyen $F = T^* \setminus \{e(v,T^*) : v \in S\}$. Az F erdőnek $|S|+1$ komponense van, egyikben van r, míg az összes többi pontosan 1 S-beli csúcsot tartalmaz. Ebből következik, hogy $F + T_S$ feszítő fa, és

$$c(F+T_S) = c(T^*) - z(S) + c(T_S) < c(T^*) = \mathrm{OPT}_V,$$

ellentmondás. □

5.5. megjegyzés. A z vektor meghatározásásának van egy szemléletes módja, ha a Prim algoritmust használjuk r-ből kiindulva a T^* fa megkeresésére. A Prim algoritmusnál minden lépésben adott egy U csúcshalmaz (kezdetben $\{r\}$), és azon egy minimális költségű feszítő fa. Az általános lépésben megkeressük az U-hoz legközelebbi v csúcsot, az őt U-hoz kötő legrövidebb élt hozzávesszük a fához, és a v csúcsot hozzáadjuk U-hoz. Mivel az új él a végső T^* fára nézve $e(v,T^*)$ lesz, a $z_v = c_{e(v,T^*)}$ költségmegosztás azt jelenti, hogy v hozzákötését az addigi fához teljes egészében v fizeti.

5.6. megjegyzés. Láttuk, hogy ebben a játékban is könnyen kiszámolható egy mag-beli vektor, de könnyű olyan pédát mutatni, ahol ez a z költségmegosztás igazságtalannak tűnik. Például ha a települések egymáshoz közel vannak, de az erőműtől messze, akkor egyetlen település fizeti a teljes, erőműhöz vezető bekötést, míg a többiek csak a rövid, települések közti szakaszokat. Ezért érdekes lehet, hogy tudjuk-e a teljes magot jellemezni, hátha a jellemzés segítségével igazságosabb költségmegosztás is található. Faigle, Fekete, Hochstättler és Kern megmutatták, hogy ilyen jellemzés nem várható: coNP-teljes egy adott x vektorról eldönteni-hogy benne van-e a magban.

5.7. megjegyzés. Tekinthetjük a feladatnak azt a változatát, amikor irányított gráfunk van, és olyan részgráfot kell építeni, amiben minden csúcsból van r-be irályított út, azaz egy r gyökerű be-fenyőt. A 5.4. tételéhez hasonló bizonyítással látható, hogy a fent definiált z ebben a játékban is a magban van. A bizonyítást azzal kell kiegészíteni, hogy F minden komponensében az S-beli csúcs (illetve r) a nyelő, így $F + T_S$ is be-fenyő.

5.2. A Shapley-érték

Ebben a fejezetben más megközelítést alkalmazunk, a stabilitás helyett az igazságosságra helyezzük a hangsúlyt. Ráadásul nem csak egyetlen játékra akarunk érvényes kifizetést találni, hanem az összes lehetséges n-játékosos játékra; nevezzünk egy ilyet érvényes kifizetési sémának. Először definiálunk néhány egyszerű axiómát, amiket egy igazságos kifizetési sémának illik teljesítenie, majd megmutatjuk, hogy ezeket valójában egyetlen érvényes séma teljesíti: az úgynevezett Shapley-érték.

Jelölje z^v a kifizetési sémában a v érték-függvényű játékhoz tartozó kifizetés-vektort. Az axiómák a következők:

- **Szimmetria**: ha adott v-re és i,j játékosokra teljesül, hogy $v(S+i) = v(S+j)\ \forall S \subseteq [n] \setminus \{i,j\}$, akkor $z^v(i) = z^v(j)$.
- **Lényegtelenek elhanyagolása:** ha adott v-re és i játékosra $v(S+i) = v(S)\ \forall S \subseteq [n] \setminus \{i\}$, akkor $z^v(i) = 0$.

– **Additivitás:** Tetszőleges v és v' érték-függvényekre és tetszőleges $i \in [n]$-re $z^{v+v'}(i) = z^v(i) + z^{v'}(i)$.

A szimmetria és a lényegtelenek elhanyagolása természetes feltételek egy igazságos elosztásnál. Az additivitást az indokolja, hogy ne legyen különbség aközött, hogy két játékot egymás után külön játszunk, vagy a kettőt együtt egyetlen játéknak tekintjük. Meglepő módon egyetlen olyan érvényes kifizetési séma van, ami ezt a három egyszerű axiómát teljesíti.

5.8. tétel (Shapley)**.** *A három axiómát egyetlen érvényes kifizetési séma elégíti ki, mégpedig a következőképpen definiált Shapley-érték:*

$$z^v(i) = \sum_{S\subseteq[n]\setminus\{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!}(v(S+i)-v(S)) = n^{-1}\sum_{S\subseteq[n]\setminus\{i\}} \binom{n-1}{|S|}^{-1}(v(S+i)-v(S)).$$

Bizonyítás. Először is lássuk, mi a Shapley-érték szemléletes jelentése. Tegyük fel, hogy a játékosok véletlen sorrendben érkeznek, így egyesével növeljük a koalíció elemszámát, és azt nézzük, hogy egy adott játékos érkezésekor a v érték-függvény szerint hogyan változik a koalíció értéke. A fent definiált $z^v(i)$ érték pont azt fejezi ki, hogy az i játékos érkezésekor mennyi a változás várható értéke. Könnyen ellenőrizhető a képlet alapján, hogy ez a z teljesíti mindhárom axiómát.

Az egyértelműség bizonyításához először az úgynevezett karakterisztikus játékokon való egyértelműséget bizonyítjuk. Adott $U \subseteq [n]$-re és $\alpha \in \mathbb{R}$ számra tekintsük az alábbi érték-függvényt:

$$v(S) = \begin{cases} \alpha & \text{ha } U \subseteq S \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ebben a játékban minden U-beli játékosnak ugyanaz a szerepe, a többi játékos pedig elhanyagolható. Így az axiómákat teljesítő egyetlen érvényes kifizetés a

$$z^v(i) = \begin{cases} \alpha/|U| & \text{ha } i \in U \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Általános v-re úgy bizonyítjuk az egyértelműséget, hogy megmutatjuk, hogy v előáll karakterisztikus érték-függvények összegeként. Legyen $\alpha(\{i\}) = v(\{i\})$ minden $i \in [n]$-re, és definiáljuk az $\alpha(S)$ értéket rekurzívan az

$$\alpha(S) = v(S) - \sum_{U\subsetneq S} \alpha(U)$$

képlettel. Ekkor könnyű látni, hogy ha összeadjuk az összes S-re az S halmazhoz és az $\alpha(S)$ számhoz tartozó karakterisztikus érték-függvényeket, akkor pont v-t kapjuk. Így az additivitás axióma értelmében z^v csak a karakterisztikus játékokhoz tartozó kifizetés-vektorok összege lehet. □

Bár a tétel explicit képletet ad a Shapley-értékre, ebben exponenciálisan sok tagú összeg szerepel, tehát nem hatékony így kiszámolni. Általánosságban nem is lehet hatékonyan: a párosítás játékokban például $\#P$-teljes feladat a kiszámolása (bár véletlen algoritmussal jól közelíthető).

A Shapley-érték használható arra is, hogy szavazási szituációknál a szavazók tényleges erejét jellemezzük. A következő egyszerű súlyozott szavazási procedúrát nézzük: adott n játékos, az i-ediknek w_i súlyú a szavazata (például egy cég közgyűlésében lehet a tulajdoni hányaddal arányos), és adott egy β küszöb: egy határozat elfogadásához több mint β szavazat kell. A szavazáshoz tartozó érték-függvény a következő 0-1 függvény:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sum_{i\in S} w_i > \beta \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A Shapley-érték (amit ebben az összefüggésben Shapley-Shubik Power Indexnek neveznek) itt egyszerűbben definiálható, bár még ezt az egyszerűbb képletet is NP-nehéz kiszámolni:

$$z^v(i) = \sum \left\{ \frac{|S|!\,(n-|S|-1)!}{n!} : S \subseteq [n] \setminus \{i\},\ w(S) \le \beta < w(S) + w_i \right\}.$$

5.9. megjegyzés. A Shapley érték további két kívánatos tulajdonsággal is rendelkezik:

– **Marginálisoktól függés**: ha az n-személyes, v_1 és v_2 értékfüggvényekkel definiált játékok olyanok, hogy egy adott i játékosra $v_1(S+i)-v_1(S) = v_2(S+i)-v_2(S)$ minden $S \subseteq [n]-i$ koalícióra, akkor $z^{v_1}(i) = z^{v_2}(i)$.

– **Kiegyensúlyozott párok**: tetszőleges v értékfüggvényre és $i, j \in [n]$ játékosokra $z^v(i)-z^{v\setminus j}(i) = z^v(j) - z^{v\setminus i}(j)$, ahol $v \setminus i$ azt az $n-1$ személyes játékot jelöli, ahol i-t kihagyjuk. Vagyis: i ugyanannyit nyer azzal, hogy j kiszáll a játékból, mint amennyit j nyerne azzal, hogy i kiszáll.

Előbbi azonnal következik a definícióból, míg utóbbit könnyű ellenőrizni karakterisztikus játékokra.

5.3. Konvex játékok

A Shapley-érték nincs mindig a magban, sőt, Deng és Papadimitriou bebizonyították, hogy NP-nehéz eldönteni, hogy a magban van-e. Van azonban játékoknak egy fontos osztálya, ahol automatikusan a magban van.

5.10. definíció. A v függvény **szupermoduláris**, ha tetszőleges $X, Y \subseteq [n]$ esetén $v(X) + v(Y) \leq v(X \cap Y) + v(X \cup Y)$. Egy játék **konvex**, ha az érték-függvénye szupermoduláris.

A szupermodularitást másképp is lehet jellemezni.

5.11. tétel. *Az alábbi három ekvivalens:*

i) *v szupermoduláris*

ii) *tetszőleges $S \subseteq T \subseteq [n]$ és $Z \subseteq [n] \setminus T$ esetén $v(S \cup Z) - v(S) \leq v(T \cup Z) - v(T)$*

iii) *tetszőleges $S \subseteq T \subseteq [n]$ és $i \in [n] \setminus T$ esetén $v(S + i) - v(S) \leq v(T + i) - v(T)$.*

Bizonyítás. Az *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* és *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* implikációk világosak. A *iii)* $\Rightarrow$ *ii)* implikációt Z mérete szerinti indukcióval bizonyítjuk. A $|Z| = 1$ eset pont *iii)*-nak felel meg. Általánosan, legyen $i \in Z$ tetszőleges. Indukció szerint $S, T, Z-i$-re igaz az állítás, tehát $v(S \cup Z - i) - v(S) \leq v(T \cup Z - i) - v(T)$. Másrészt *iii)*-at alkalmazva $S \cup Z - i, T \cup Z - i, i$-re azt kapjuk, hogy $v(S \cup Z) - v(S \cup Z - i) \leq v(T \cup Z) - v(T \cup Z - i)$. A kettőből együtt következik *ii)*. □

A *iii)* tulajdonság szemléletesen azt jelenti, hogy egy játékos egy bővebb koalíciónak jobban megnöveli az értékét, mint egy szűkebb koalíciónak. Ha költségekkel fogalmazzuk meg ugyanezt, akkor arról van szó, hogy egy játékos csatlakozása egy bővebb koalícióhoz kevésbé növeli a költséget, mint a csatlakozása egy szűkebb koalícióhoz. Sok olyan játék van, ahol a játék természetéből adódóan ez mindig teljesül.

5.12. tétel. *Konvex játék esetén a Shapley-érték a magban van.*

Bizonyítás. Legyen $i_1, \ldots, i_n$ a játékosok egy sorrendje, és legyen $U_j = \{i_1, i_2, \ldots, i_j\}$, valamint $U_0 = \emptyset$. Megmutatjuk, hogy A $z(i_j) = v(U_j) - v(U_{j-1})$ érvényes kifizetés-vektor a magban van. Ebből következik az állítás, hiszen a Shapley-érték ilyenek konvex kombinációja, és a mag konvex.

Indirekt legyen S egy tartalmazásra nézve maximális koalíció, amire $v(S) > z(S)$, és legyen j a legkisebb index, amire $i_j \notin S$. A definíció szerint $v(U_{j-1}) = z(U_{j-1})$ és $v(U_j) = z(U_j)$. A szupermodularitás értelmében

$$v(S) + v(U_j) \leq v(U_{j-1}) + v(U_j \cup S),$$

másrészt nyilván $z(S) + z(U_j) = z(U_{j-1}) + z(U_j \cup S)$, így azt kapjuk, hogy $v(U_j \cup S) > z(U_j \cup S)$, ellentmondásban S maximalitásával. □

Egy példa: fedési játék

Az egyetem szeretne különféle tudományos folyóiratokra előfizetni, ezért megkérdezik az egyetem intézeteit, hogy mely folyóiratokra lenne szükségük. Van n intézet, m folyóirat, és $F_i \subseteq [m]$ az i-edik intézet által igényelt folyóiratok halmaza (feltehetjük, hogy minden folyóiratot legalább egy intézet igényel). Ha t darab folyóiratot fizetünk elő, akkor az előfizetési költség $f(t)$, ahol f monoton növő konkáv függvény. Hogyan osszuk el igazságosan az előfizetések teljes költségét az intézetek között?

A feladathoz definiálhatunk egy játékot, a következő értékfügvénnyel:

$$v(S) = -f(|\cup_{i \in S} F_i|) \quad (S \subseteq [n]).$$

Egy koalíció költsége tehát a koalíció tagjai által igényelt folyóiratok előfizetési költsége. Könnyű látni, hogy a v értékfüggvény szupermoduláris az f függvény konkavitása miatt. A játék tehát konvex, így a Shapley-érték a magban van.

Minimális feszítő fa játék újra

Térjük vissza ahhoz a kérdéshez, hogy a feszítő fa játéknál tudunk-e igazságosabb mag-beli költségmegosztást találni, mint a Bird-féle? Ha a játék konvex volna, akkor a Shapley-érték egy ilyen igazságosabb megosztás lenne. Könnyű azonban olyan súlyozott gráfot mutatni, ahol a játék nem konvex, és a Shapley-érték nincs a magban. Legyen $V = \{r, v_1, v_2, v_3\}$, és $G = K_4$. Az rv_1 él költsége legyen 1, a többi él költsége pedig 0. Így a $\{v_1\}$ koalíció értéke -1, a többi koalícióé pedig 0. Könnyű látni, hogy a magban csak a csupa 0 vektor van. Viszont a Shapley-érték szerint v_1-nek 1/3-ot kell fizetnie, míg v_2 és v_3 1/6-ot kapnak.

Ennek ellenére egy trükkel mégis ki tudjuk használni a Shapley-érték jó tulajdonságait. Definiáljuk a következő módosított költséget a teljes $(n+1)$-csúcsú gráf élein élein:

$$c^*_{uv} = \min\{\gamma : \text{az } \{e \in E : c_e \leq \gamma\} \text{ részgráfban van } u - v \text{ út}\}.$$

Jelölje v^* a c^* költséghez tartozó érték-függvényt, v pedig az eredetit (figyelem: a játék értéke a költség ellentettje!)

5.13. tétel. *Minden S koalícióra $v^*(S) \geq v(S)$, és $v^*([n]) = v([n])$. A v^*-hoz tartozó játék konvex.*

Bizonyítás. Mivel a súlyokat csökkentettük, tetszőleges feszített részgráfon a minimális súlyú feszítő fa súlya csökken. Másrészt pl. a Kruskal algoritmusból látható, hogy a teljes csúcshalmazon az eredeti minimális súlyú feszítő fák továbbra is minimális súlyúak lesznek. A konvexitáshoz azt kell megfigyelni, hogy tetszőleges i és $S \subseteq V \setminus \{r, i\}$ esetén $v^*(S+i) - v^*(S)$ pont az i-ből $(S+r)$-be menő, c^* szerint legolcsóbb él költségének ellentettje (c-re ez nem volt igaz). Így teljesül, hogy minden $U \subseteq S \subsetneq [n]$-re és minden $i \notin S$-re $v^*(S+i) - v^*(S) \geq v^*(U+i) - v^*(U)$. □

A tétel alapján egyrészt a c^*-hoz tartozó mag része a c-hez tartozó magnak, másrészt a c^*-hoz tartozó Shapley-érték a konvexitás miatt benne van a magban, következésképp benne van a c-hez tartozó magban is. Megfigyelhetjük, hogy abban a példában, ahol a települések egymáshoz közel vannak, de az erőműtől messze, ez a költségmegosztás sokkal igazságosabb, mint a Bird-féle. Ugyanis egy adott játékosnak pontosan azoknál a sorrendeknél lesz nagy a költsége, ahol ő az első; tehát a várható érték kb. ugyanaz lesz minden játékosnál.

5.14. megjegyzés. Belátható, hogy a v^* értékfüggvényhez tartozó Shapley-értéket a következő képlet adja meg. Egy adott u csúcsra jelölje $c^*_1(u), \ldots, c^*_{n-1}(u)$ az u-ból a többi nem-gyökér csúcsba menő élek súlyait növekvő sorrendben. Ekkor az u játékos Shapley-érték szerinti hozzájárulása

$$z(u) = \frac{c^*_{ru}}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\min\{c^*_{ru}, c^*_i(u)\}}{i(i+1)}.$$

Ezzel szemben az eredeti v értékfüggvényhez tartozó Shapley-érték kiszámolása $\#P$-teljes feladat.

5.4. A nukleólusz

A nukleólusz a Shapley-értéktől különböző jó tulajdonságokkal rendelkező érvényes kifizetés, amit Schmeidler vezetett be 1969-ben. Ha a mag nemüres, akkor a nukleólusz – a Shapley-értékkel ellentétben – mindig a magban van. A nukleólusz definiálásához tekintsünk egy v értékfüggvényt és egy z érvényes kifizetést. Jelölje $\mathcal{L}(v,z) = (S_1, S_2, \ldots, S_{2^n})$ az összes koalíció $z(S) - v(S)$ szerinti növekvő sorrendben rendezett listáját, és jelölje $q(v,z)$ a $(z(S_1) - v(S_1), z(S_2) - v(S_2), \ldots, z(S_{2^n}) - v(S_{2^n}))$ vektort. A v játék nukleólusza az a z érvényes kifizetés, amire a $q(v,z)$ vektor lexikografikusan maximális (azaz első eleme a lehető legnagyobb, azon belül második eleme a lehető legnagyobb, stb.).

Világos, hogy ha a mag nemüres, akkor van olyan z érvényes kifizetés, amire a $q(v,z)$ vektor nemnegatív, tehát a lexikografikusan maximális is ilyen, azaz a nukleólusz a magban van.

5.15. tétel. *A nukleólusz egyértelmű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy z_1 és z_2 is kielégíti a nukleólusz feltételeit, azaz olyan érvényes kifizetések, hogy $q(v,z_1)$ és $q(v,z_2)$ is lexikografikusan maximális (ebből már következik, hogy $q(v,z_1) = q(v,z_2)$). Legyen $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$; ez szintén egy érvényes kifizetés. Nézzük az $\mathcal{L}(v,z) = \{S_1, S_2, \ldots, S_{2^n}\}$ listát és a $q(v,z)$ vektort. Tudjuk, hogy $q(v,z)_1 = z(S_1) - v(S_1) = \frac{1}{2}(z_1(S_1) - v(S_1) + z_2(S_1) - v(S_1))$. Mivel se $z_1(S_1) - v(S_1)$, se $z_2(S_1) - v(S_1)$ nem lehet kisebb mint $z(S_1) - v(S_1)$ (hiszen akkor $q(v,z)$ lexikografikusan nagyobb lenne mint $q(v,z_1)$ vagy $q(v,z_2)$), azt kapjuk hogy $z_1(S_1) - v(S_1) = z_2(S_1) - v(S_1)$, azaz $z_1(S_1) = z_2(S_1)$. Ha már beláttuk hogy $z_1(S_i) = z_2(S_i)$ minden $i \leq k-1$-re, akkor ugyanezzel az érveléssel kijön $i = k$-ra is. Azt kaptuk, hogy $z_1(S_i) = z_2(S_i)$ minden i-re, tehát $z_1 = z_2$. □

A párosítás játékban a nukleólusz polinom időben kiszámolható, mert csak a kételemű koalíciókat kell figyelembe venni, így egymás után polinom sok polinom méretű LP-t kell megoldani. A feszítő fa játékban viszont NP-nehéz kiszámolni.

Példa ♦ Nézzük az 5.3. fejezetben leírt fedési játéknak a következő egyszerű esetét. Összesen 3 intézet van és 2 folyóirat; $F_1 = F_2 = \{1\}$ és $F_3 = \{2\}$. Itt a Shapley-értékre azt kapjuk, hogy $z_1 = z_2 = -5/6$, $z_3 = -4/3$, azaz a harmadik intézet kevesebb mint dupla annyit fizet, mint az első kettő. Ha viszont a nukleóluszt akarjuk megtalálni, akkor először is olyan z kell, ami maximalizálja a $z(S) - v(S)$ értékek minimumát a nemtriviális koalíciókon. Mivel $z_1 + z_2 + z_3 = -3$, és feltehetjük, hogy $z_1 = z_2$, ez a következőre vezet:

$$\max_{z_3} \min\{-1 - z_3, z_3/2 + 3/2\}.$$

Az egyértelmű megoldás $z_1 = z_2 = -2/3$, $z_3 = -5/3$, azaz itt a harmadik intézet több mint dupla annyit fizet, mint az első kettő.